Векторная функция скалярного аргумента

Волченко Ю.М.

Содержание лекции

Понятие векторной функции скалярного аргумента (ВФСА), ее предел и непрерывность. Производная ВФСА, ее геометрический смысл. Теоремы о пределах и производных ВФСА. Касательная, нормаль и нормальная плоскость кривой. Скорость и ускорение криволинейного движения. Механический смысл производных ВФСА.

Анимация образования годографов плоских и пространственных кривых, геометрического смысла производной ВФСА, динамики изменения векторов скорости и ускорения.
Анимация работает только в программе Acrobat Reader!

Задание ВФСА в системе *Mathematica*. Вычисление производных ВФСА и построение траекторий движения.

10 марта 2013 г.

На лекции «Функция II» мы рассматривали функции, заданные параметрически на плоскости и в пространстве. Такую функцию можно задать и по-другому, представляя ее значение не точкой в пространстве, а радиус-вектором этой точки. В результате удается ввести компактное определение предела такой функции, ее непрерывности и гладкости, а также получить наглядное представление о скорости и ускорении движения точки по кривой.

1 Основные понятия

Координаты точки $M(x, y, z)$, движущейся в пространстве, являются функциями времени t:

$$x = x(t)\,, y = y(t)\,, z = z(t)\,.$$

Можно считать, что движется конец радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ точки. Тогда и этот вектор является функцией времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат. Уравнение (1) называется ***векторной функцией скалярного аргумента*** (***ВФСА***) t (t уже не обязательно время); функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ называются ***координатными***; линия, которую описывает точка M, называется ***траекторией движения***, или ***годографом*** вектора $\mathbf{r}(t)$. Таким образом, ВФСА осуществляет отображение $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ — из одномерного пространства параметра-скаляра t в пространство трехмерных векторов.

При $z(t) \equiv 0$ линия, описываемая годографом, называется ***плоской***.

Винтовая линия, рассмотренная нами ранее[†] в виде параметрически заданной функции, теперь может быть записана как ВФСА:

$$\mathbf{r}(t) = R\cos t\mathbf{i} + R\sin t\mathbf{j} + vt\mathbf{k}.$$

На анимационном рис. 1 показано, как образуются годографы переменных радиус-векторов на плоскости и в пространстве.

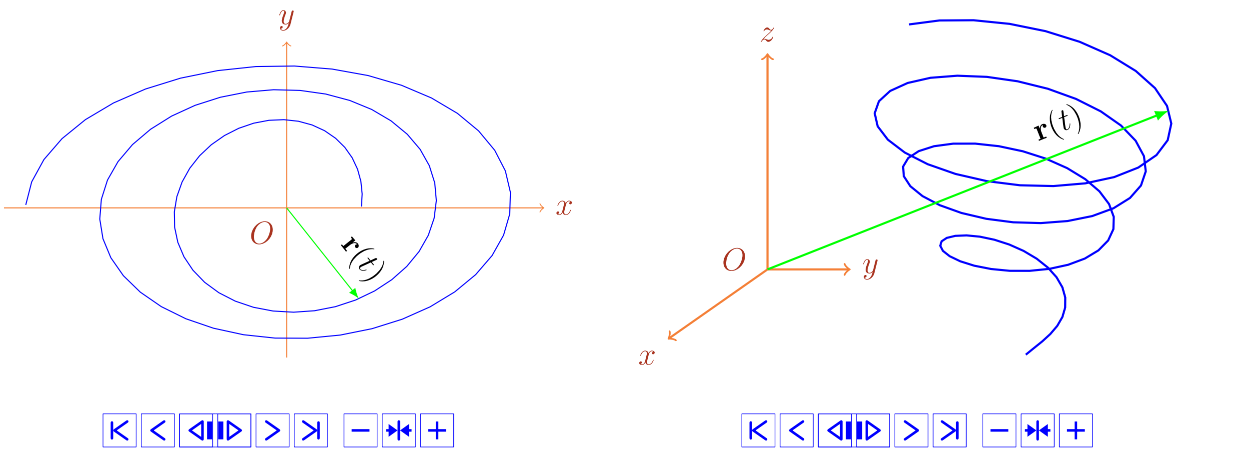


Рис. 1. Годографы на плоскости и в пространстве.

2 Предел и непрерывность

Для функций одного аргумента мы рассматривали понятия предела и непрерывности. Такие же понятия могут быть введены и для ВФСА.

Говорят, что вектор $\mathbf{a}$ является ***пределом*** вектора $\mathbf{r}(t)$ и пишут

$$\mathbf{a} = \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t),$$

если

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0. \tag{2}$$

[†]Лекция «Функция II».

Последний предел является обычным пределом функции одного аргумента, так как модуль вектора является скалярной, а не векторной величиной. Поэтому для определения предела ВФСА не обязательно использовать язык «$\varepsilon - \delta$». Отметим также, что в определении речь идет только о конечном пределе, так как бесконечные векторы нами не рассматриваются.

Лемма 1. *ВФСА* $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ *тогда и только тогда имеет пределом вектор* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *при* $t \to t_0$*, когда ее координатные функции при* $t \to t_0$ *имеют пределами соответствующие координаты вектора* $\mathbf{a}$*:*

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_1,\ \lim_{t\to t_0} y(t) = a_2,\ \lim_{t\to t_0} z(t) = a_3. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Так как

$$|x(t) - a_1| \le \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2} = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|,$$

то из равенства (2) получаем, что

$$\lim_{t\to t_0} |x(t) - a_1| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0} x(t) = a_1.$$

Эквивалентность следует из определения предела: на языке «$\varepsilon - \delta$» существование предела слева от знака эквивалентности записывается точно так же, как и существование предела справа от этого знака. Аналогично доказывается справедливость двух других пределов в (3).

Достаточность. Пусть теперь выполнены равенства (3). Тогда можно записать, что

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = \lim_{t\to t_0} \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2} = 0,$$

так как пределы квадратов равны нулю в силу (3). $\square$

Делаем вывод, что существование предела ВФСА равносильно существованию пределов ее координатных функций.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{a} = \lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t)$*, то* $|\mathbf{a}| = \lim_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t)|$.

Доказательство. Следует из того, что

$$||\mathbf{r}(t)| - |\mathbf{a}|| \le |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}|$$

Следствие 1. $\mathbf{r}(t) \to 0$ *равносильно* $|\mathbf{r}(t)| \to 0$.

Доказательство. Необходимость получаем из леммы 2. Для доказательства достаточности можно заметить, что $|\mathbf{r}(t) - 0| \to 0$ означает стремление к нулю каждой координатной функции, а тогда и $\mathbf{r}(t) \to 0$. $\square$

Пусть существует пределы двух векторных и одной скалярной функции:

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}\left(t\right)=\mathbf{r}_0,\ \lim_{t\to t_0}\mathbf{p}\left(t\right)=\mathbf{p}_0,\ \lim_{t\to t_0}u\left(t\right)=u_0,\ u_0\in\mathbb{R}.$$

Тогда справедливы следующие теоремы, доказательства которых приведены в Приложении[1)].

Теорема 1. *Предел суммы двух ВФСА существует и равен сумме их пределов:*

$$\lim_{t\to t_0}\left[\mathbf{r}\left(t\right)+\mathbf{p}\left(t\right)\right]=\mathbf{r}_0+\mathbf{p}_0.$$

Теорема 2. *Предел произведения скалярной функции на векторную существует и равен произведению их пределов:*

$$\lim_{t\to t_0}\left[u\left(t\right)\mathbf{r}\left(t\right)\right]=u_0\mathbf{r}_0.$$

Теорема 3. *Предел скалярного произведения двух ВФСА существует и равен скалярному произведению их пределов:*

$$\lim_{t\to t_0}\left[\mathbf{r}\left(t\right)\mathbf{p}\left(t\right)\right]=\mathbf{r}_0\mathbf{p}_0.$$

Теорема 4. *Предел векторного произведения двух ВФСА существует и равен векторному произведению их пределов:*

$$\lim_{t\to t_0}\left[\mathbf{r}\left(t\right)\times\mathbf{p}\left(t\right)\right]=\mathbf{r}_0\times\mathbf{p}_0.$$

ВФСА называется ***непрерывной*** при $t\to t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}\left(t\right)=\mathbf{r}\left(t_0\right).$$

Из определения предела ВФСА следует, что она является непрерывной, если

$$\lim_{t\to t_0}\left|\mathbf{r}\left(t\right)-\mathbf{r}\left(t_0\right)\right|=0.$$

Непрерывность ВФСА равносильна непрерывности всех ее координатных функций.

ВФСА называется ***непрерывной на множестве*** T, если она непрерывна в каждой точке этого множества. ***Кривая***, являющаяся траекторией движения непрерывной ВФСА, также называется ***непрерывной***.

3 Производная

Вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(t+\Delta t) - \mathbf{r}\,(t)$, где Δt приращение аргумента, называется также ***приращением ВФСА***. ***Производной ВФСА*** называется предел отношения вектора приращения к приращению аргумента:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t) - \mathbf{r}\,(t)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Переходя к координатному представлению ВФСА, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t) - \mathbf{r}\,(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{x\,(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \frac{x\,(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \frac{x\,(t+\Delta t) - x\,(t)}{\Delta t}\,\mathbf{k}\right] = \\ &= x'\,(t)\,\mathbf{i} + y'\,(t)\,\mathbf{j} + z'\,(t)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Это означает, что производная ВФСА существует тогда и только тогда, когда существуют конечные производные всех трех координатных функций. Поэтому, чтобы найти производную ВФСА, достаточно эти функции продифференцировать. Кстати, если производная ВФСА существует, тоже говорят, что она ***дифференцируема***.

Выясним геометрический смысл производной ВФСА. Рассмотрим кривую в пространстве, являющуюся годографом вектора $\mathbf{r}\,(t)$ (см. рис. 2). Возьмем некоторое фиксированное значение параметра t и дадим ему приращение Δt. Концы радиус-векторов $\mathbf{r}\,(t)$ и $\mathbf{r}\,(t+\Delta t)$, лежащие, естественно. на кривой, обозначим, соответственно, M и M_1. Из треугольника OMM_1 видно, что секущая $\mathbf{MM}_1$ равна вектору приращения ВФСА $\Delta\mathbf{r}\,(t)$. Как и раньше, ***касательной*** к кривой называется предельное положение секущей, когда точка M_1 стремится к точке M вдоль кривой (при этом $\Delta t \to 0$), если такое предельное положение существует.

Пусть ВФСА $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема. Рассмотрим вектор $\Delta\mathbf{r}\,(t)\,/\Delta t$. Он лежит на секущей и при $\Delta t \to 0$ превращается в вектор $d\mathbf{r}/dt$. Следовательно, предельное положение секущей, т.е. касательная, в точке t существует, а ее направляющим вектором является вектор $d\mathbf{r}/dt$. В этом и заключается геометрический смысл производной ВФСА: *она является направляющим вектором касательной к годографу ВФСА*.

Процесс превращения вектора $\Delta\mathbf{r}\,(t)\,/\Delta t$ в вектор $d\mathbf{r}/dt$ можно увидеть на анимационном рис. 2.

Дифференцирование ВФСА, как и дифференцирование обычных функций, подчиняется определенным правилам, которые мы сейчас рассмотрим.

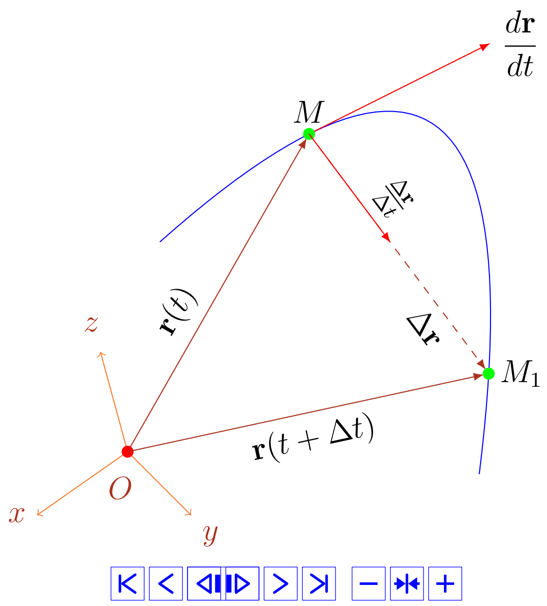


Рис. 2. Геометрический смысл производной ВФСА.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВФСА

1°. *Производная суммы ВФСА равна сумме их производных:*

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\right]=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}+\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

2°. *Производная произведения скалярной функции $u\,(t)$ на ВФСА равна*

$$\frac{d}{dt}\left(u\,\mathbf{r}\,\right)=\frac{du}{dt}\,\mathbf{r}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,u.$$

В частности, если $a=\mathrm{const}$, то $\dfrac{d}{dt}\left(a\,\mathbf{r}\right)=a\,\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.

3°. *Производная скалярного произведения двух ВФСА равна*

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\right)=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\,\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\,\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

4°. *Если $|\mathbf{e}|=1$, то $\mathbf{e}\perp\mathbf{e}'$.*

5°. *Производная векторного произведения двух ВФСА равна (порядок множителей важен!)*

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2\right)=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

Доказательства этих свойств см. в Приложении[2)].

Линия, определяемая уравнением (1), называется ***гладкой***, если координатные функции $x\,(t)$, $y\,(t)$, $z\,(t)$ для всех t имеют непрерывные производные, не обращающиеся в нуль одновременно: $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$, или, по-другому, $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$.

4 Касательная, нормаль, нормальная плоскость

Будем рассматривать ВФСА, у которых $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$. Так как вектор $d\mathbf{r}/dt$ является направляющим вектором касательной к кривой, то уравнение касательной в точке $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется ***нормалью*** к кривой в этой точке. Нормалей к пространственной кривой в данной точке можно провести бесчисленное множество. Все они лежат в плоскости, перпендикулярной кривой. Эта плоскость называется ***нормальной плоскостью*** кривой в данной точке. Ее уравнение следует из ее определения:

$$x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[x - x(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0.$$

На рис. 3 показаны касательная к кривой, ее нормальная плоскость P и несколько нормалей, лежащих в этой плоскости.

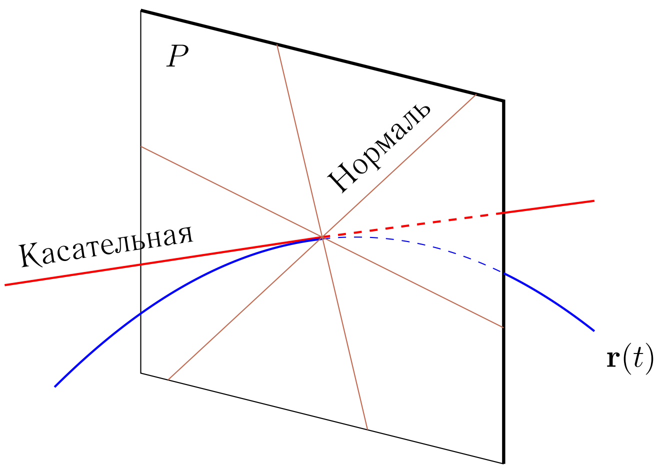


Рис. 3. Касательная, нормаль, нормальная плоскость.

Для плоской кривой рассматривается лишь одна нормаль — та, которая лежит в плоскости кривой.

Пример 1. *Найти уравнение нормальной плоскости и касательной к винтовой линии*

$$\mathbf{r}\left(t\right)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j}+vt\,\mathbf{k}$$

при $t_0=\pi/4$.

Решение. Вычислим производную заданной ВФСА:

$$\mathbf{r}'\left(t\right)=-R\sin t\,\mathbf{i}+R\cos t\,\mathbf{j}+v\,\mathbf{k},$$

Тогда

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{R}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}+\frac{R}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}+\frac{v\pi}{4}\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{R}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}+\frac{R}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}+v\,\mathbf{k}.$$

В результате получаем следующее уравнение касательной:

$$\frac{x-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-\frac{R}{\sqrt{2}}}=\frac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{\frac{R}{\sqrt{2}}}=\frac{z-\frac{v\pi}{4}}{v},$$

или

$$\frac{\sqrt{2}\,x-R}{-R}=\frac{\sqrt{2}\,y-R}{R}=\frac{4z-\pi v}{4v}.$$

Далее находим уравнение нормальной плоскости:

$$R\left(\sqrt{2}\,x-R\right)-R\left(\sqrt{2}\,y-R\right)-4v\left(4z-\pi v\right)=0.$$

5 Скорость и ускорение криволинейного движения

Вернемся к вектору перемещения $\mathbf{MM}_1=\Delta\mathbf{r}\left(t\right)=\mathbf{r}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{r}\left(t\right)$ на рис. 2. Пусть ВФСА дифференцируема. При малом приращении Δt движение по дуге MM_1 приближенно можно заменить прямолинейным движением вдоль вектора $\mathbf{MM}_1$. Скорость такого движения, как известно, равна отношению пройденного пути ко времени, за которое этот путь пройден. Поэтому принято считать ***средней скоростью*** криволинейного движения точки за промежуток времени Δt отношение вектора перемещения к приращению времени:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\mathbf{r}\left(t\right)}{\Delta t}.$$

Скорость криволинейного движения точки в момент времени t определяет предел:

$$\mathbf{v}\left(t\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{v}_{\text{ ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}\left(t\right)}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Эта формула дает механический смысл производной ВФСА: *скорость точки в криволинейном движении равна первой производной ее радиус-вектора по времени.*

Кроме того, равенство $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ означает, что скорость криволинейного движения точки всегда направлена по касательной к траектории.

Вернемся к геометрическому смыслу производной. Если вдуматься, то мы выяснили только геометрический смысл *направления* производной. Чтобы понять геометрический смысл ее *модуля*, заметим, что наш параметр t может быть функцией еще какого-нибудь параметра, например, τ, то есть может быть функцией $t = t(\tau)$. Тогда и ВФСА станет функцией нового параметра: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$. Ни годограф, ни секущая, ни направление касательной от этого не изменятся, но модуль производной ВФСА станет другим: $|\mathbf{r}'(\tau)| = |\mathbf{r}'(t(\tau))| = |\mathbf{r}'(t)|\,|t'(\tau)|$. Как видим, модуль производной $\mathbf{r}'(\tau)$ по сравнению с модулем производной $\mathbf{r}'(t)$ изменился на множитель $|t'(\tau)|$.

Если параметр t — время, то переход к новому параметру τ означает, что точка пробегает ту же траекторию, но ее движение подчиняется иному закону; скажем, ее движение в зависимости от t было ускоренным, а в зависимости от τ стало замедленным и т.п. Это значит, что если закон движения точки изменился, то она будет двигаться по той же кривой, но с другим модулем скорости, хотя вектор скорости по-прежнему будет направлен по касательной.

Ускорением $\mathbf{w}$ точки в криволинейном движении называется производная от вектора скорости по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Вектор $\mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ называется ***второй производной*** ВФСА†. Формула определения ускорения приводит к механическому смыслу этой функции: *ускорение криволинейного движения точки есть вторая производная ВФСА по времени*. Понятно, что в декартовой системе координат вторая производная вычисляется по формуле

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + y''(t)\,\mathbf{j} + z''(t)\,\mathbf{k}.$$

Мы знаем, что вектор скорости направлен по касательной к траектории. А как направлен вектор ускорения криволинейного движения? На рис. 4 показаны векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}'(t+\Delta t)$, выходящие, соответственно, из точек M и M_1 и направленные по касательным к траектории. Второй вектор параллельным переносом перемещен своим началом в точку M для того, чтобы построить вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}'(t)$. Этот вектор направлен в сторону *вогнутости кривой*[3)]. Точно так же будет направлен и вектор $\Delta\mathbf{r}'(t)/\Delta t$, а затем и вектор $\mathbf{r}''(t)$, тоже изображенный на рис. 4.

Вывод: *ускорение всегда направлено в сторону вогнутости кривой*.

$^\dagger k$-я производная ВФСА определяется как $\mathbf{r}^{(k)}(t) = \left(\mathbf{r}^{(k-1)}(t)\right)'$.

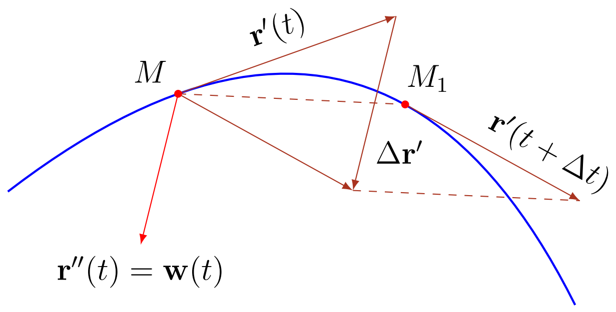


Рис. 4. Вторая производная ВФСА.

Пример 2. *Найти траекторию, скорость и ускорение движения точки по кривой*

$$\mathbf{r}\,(t) = \left(t^3 - 3\pi\right)\mathbf{i} + \left(t^3 - 6\operatorname{arctg} t\right)\mathbf{j}.$$

Решение. Так как $x\,(t) = t^3 - 3\pi$, то $t = \sqrt[3]{x+3\pi}$. Подставляя это выражение вместо t во вторую координатную функцию, получим $y = x + 3\pi - 6\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x+3\pi}$. Эта функция и является траекторией движения. Найдем скорость и ускорение движения:

$$\mathbf{v}\,(t) = \mathbf{r}'\,(t) = 3t^2\mathbf{i} + \left(3t^2 - \frac{6}{1+t^2}\right)\mathbf{j},$$
$$\mathbf{w}\,(t) = \mathbf{v}'\,(t) = 6t\mathbf{i} + \left(6t + \frac{12t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)\mathbf{j}.$$

Визуализацию движения см. на анимационном рис. 5. Для лучшего восприятия модуль скорости уменьшен в 2 раза, а модуль ускорения — в 3 раза.

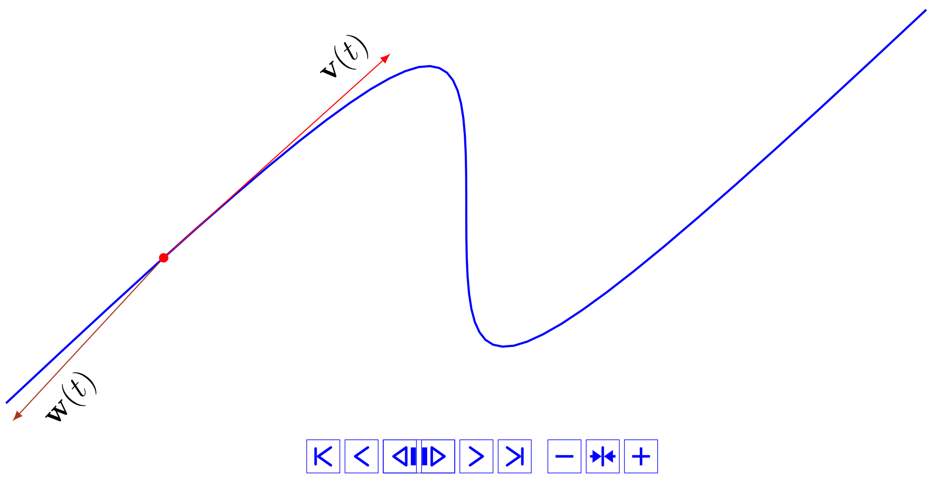


Рис. 5. Скорость и ускорение криволинейного движения.

В Приложении рассмотрено использование системы *Mathematica* в области векторных функций скалярного аргумента[4)].

Приложение

[1] *Доказательство теоремы 1*
обеспечивается выполнением неравенства:

$$|\mathbf{r}(t) + \mathbf{p}(t) - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_0)| \le |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| + |\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_0|.$$

Доказательство теоремы 2.

И в этом случае достаточно рассмотреть неравенство:

$$|u(t)\,\mathbf{r}(t) - u_0\mathbf{r}_0| = |u(t)[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0] + (u(t) - u_0)\,\mathbf{r}_0| \le$$
$$\le |u(t)|\,|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| + |u(t) - u_0|\,|\mathbf{r}_0|.$$

В первом слагаемом правой части первый множитель стремится к постоянной, а второй — к нулю, во втором слагаемом первый множитель стремится к нулю, а второй постоянен, так что правая часть стремится к нулю, а тогда и левая тоже.

Доказательство теоремы 3.

Используя тот факт, что $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\left|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, запишем следующее неравенство:

$$|\mathbf{r}(t)\,\mathbf{p}(t) - \mathbf{r}_0\mathbf{p}_0| = |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0]\,\mathbf{p}(t) + [\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_0]\,\mathbf{r}_0| \le$$
$$\le |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| + |\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_0|\,|\mathbf{r}_0|.$$

Далее остается повторить то, что было сказано при завершении доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 4.

Теперь используем формулу модуля векторного произведения

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\left|\sin\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

и запишем еще одно неравенство:

$$|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0| = |[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0] \times \mathbf{p}(t) + \mathbf{r}_0 \times [\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_0]| \le$$
$$\le |\mathbf{p}(t)|\,|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| + |\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_0|\,|\mathbf{r}_0|.$$

Далее снова повторяем конец доказательства теоремы 2.

[2]

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВФСА
с доказательствами

1° *Производная суммы ВФСА равна сумме их производных:*

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2] = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

Следует из теоремы 1:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}_1(t + \Delta t) + \mathbf{r}_2(t + \Delta t) - [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}_2(t + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

2° *Производная произведения скалярной функции $u(t)$ на ВФСА равна*

$$\frac{d}{dt}(u\,\mathbf{r}) = \frac{du}{dt}\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}u.$$

В частности, если $a = \mathrm{const}$, то $\dfrac{d}{dt}(a\,\mathbf{r}) = a\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Применим теоремы 1 и 2:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u\,\mathbf{r}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)\,\mathbf{r}(t+\Delta t)-u(t)\,\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)\,[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]+\mathbf{r}(t)\,[u(t+\Delta t)-u(t)]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)\,[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t)\,[u(t+\Delta t)-u(t)]}{\Delta t} = \\ &= u\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\,\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

3° *Производная скалярного произведения двух ВФСА равна*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\,\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\,\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

Вытекает из теорем 1 и 3:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\,\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)\,\mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\,[\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_2(t)]+\mathbf{r}_2(t)\,[\mathbf{r}_1(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\,[\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_2(t)]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_2(t)\,[\mathbf{r}_1(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)]}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{r}_1\,\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}+\mathbf{r}_2\,\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}.\end{aligned}$$

4° *Если* $|\mathbf{e}| = 1$*, то* $\mathbf{e}\perp\mathbf{e}'$.

Продифференцировав $\mathbf{e}\,\mathbf{e} = 1$, получим $\mathbf{e}'\mathbf{e}+\mathbf{e}\,\mathbf{e}' = 0 \Longrightarrow \mathbf{e}\,\mathbf{e}' = 0 \Longrightarrow \mathbf{e}\perp\mathbf{e}'$.

5° *Производная векторного произведения двух ВФСА равна*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}.$$

Следует из теорем 1 и 4:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\times\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\times[\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_2(t)]+[\mathbf{r}_1(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)]\times\mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t+\Delta t)\times[\mathbf{r}_2(t+\Delta t)-\mathbf{r}_2(t)]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[\mathbf{r}_1(t+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t)]\times\mathbf{r}_2(t)}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}+\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2.\end{aligned}$$

[3] Чтобы лучше понять, что означает «вектор $\mathbf{r}''(t)$ направлен в сторону вогнутости кривой», разложим (предполагая, что это возможно) координатные функции ВФСА (1) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{(k)}(t)}{k!}(t-t_0)^k+\frac{x^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1},\ c_1\prec t,t_0;$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(t)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{y^{(n+1)}(c_2)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}, \ c_2 \prec t, t_0;$$
$$z(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{(k)}(t)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{z^{(n+1)}(c_3)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}, \ c_3 \prec t, t_0.$$

Умножим первое равенство на $\mathbf{i}$, второе — на $\mathbf{j}$, третье — на $\mathbf{k}$ и сложим их:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t)}{k!}(t-t_0)^k + \mathbf{Q}_n \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{П1}$$

$$\mathbf{Q}_n = x^{(n+1)}(c_1)\,\mathbf{i} + y^{(n+1)}(c_2)\,\mathbf{j} + z^{(n+1)}(c_3)\,\mathbf{k}.$$

Формула (П1) называется ***формулой Тейлора*** для ВФСА.

Возьмем в этой формуле t в качестве t_0, а $t+\Delta t$ — в качестве t. Используя первые три члена этой формулы, получим, что

$$\mathbf{MM}_1 = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\,\Delta t + \mathbf{r}''(t)\,\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \ldots .$$

Будем говорить, что в некоторой точке кривая вогнута в направлении вектора $\mathbf{a}$, если она отклоняется от своей касательной в этой точке в сторону вектора $\mathbf{a}$. Из последнего равенства видно, что при достаточно малых Δt вектор $\mathbf{MM}_1$ отклоняется от своей касательной $\mathbf{r}'(t)\,\Delta t$ в сторону вектора $\mathbf{r}''(t)$, так как $(\Delta t)^2/2 > 0$. Это и подразумевают, когда говорят, что вектор $\mathbf{r}''(t)$ направлен в сторону вогнутости кривой.

[4)] Поскольку ВФСА представляет собой совокупность координатных функций, в системе *Mathematica* ее можно задавать в виде списка. Зададим таким образом обычную параболу:

```
r[t_] := {t,t^2}
```

и винтовую линию:

```
r3D[t_] := {R Cos[t],R Sin[t],v t}
```

Теперь с этими ВФСА можно выполнять различные действия. Вычислим их значения в конкретной точке:

```
r[0.5]
{0.5,0.25}
r3D[π]
{-R,0,π v}
```

Найдем пределы:

```
Limit[r[t],t → 2]
{2,4}
Limit[r3D[t],t → 0]
{R,0,0}
```

Вычислим производные в общем виде:

```
r'[t]
r''[t]
{1,2t}
```

```
{0,2}
r3D′[t]
r3D″[t]
{-R Sin[t],R Cos[t],v}
{-R Cos[t],-R Sin[t],0}
```

и для частных значений параметра t:

```
r′[1]
{1,2}
r3D′[π/2]
{-R,0,v}
r3D″[π/4]
```

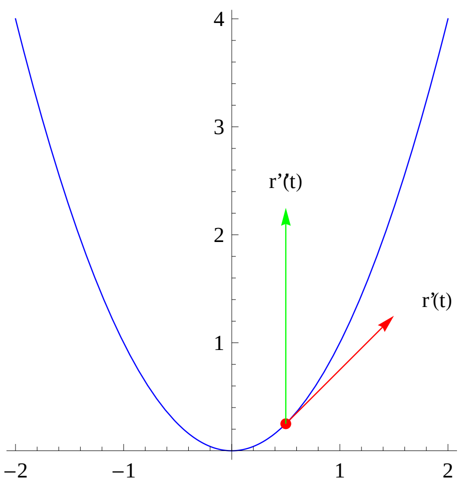
$$\left\{-\frac{R}{\sqrt{2}},-\frac{R}{\sqrt{2}},0\right\}$$

Чтобы построить векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$, заметим, что оба они начинаются в точке $\mathbf{r}(t)$, а заканчиваются: первый — в точке $\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}'(t)$, а второй — в точке $\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}''(t)$. Найдем концы векторов:

```
r[t] + r′[t]
{1 + t,2t + t^2}
r[t] + r″[t]
{t,2 + t^2}
```

Построим график ВФСА-параболы с векторами $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$, вычисленными для значения параметра $t=0{,}5$:

```
ParametricPlot[r[t],{t,-2,2},PlotStyle → {Blue},Epilog → {Red,
  PointSize[Medium],Point[r[0.5]],Arrow[{r[0.5],r[0.5] + r′[0.5]}],Green,
  Arrow[{r[0.5],r[0.5]+ r″[0.5]}],Black,Text[’’r′(t)’’,{1.9,1.4}],
  Text[’’r″(t)’’,{0.5,2.5}]}]
```

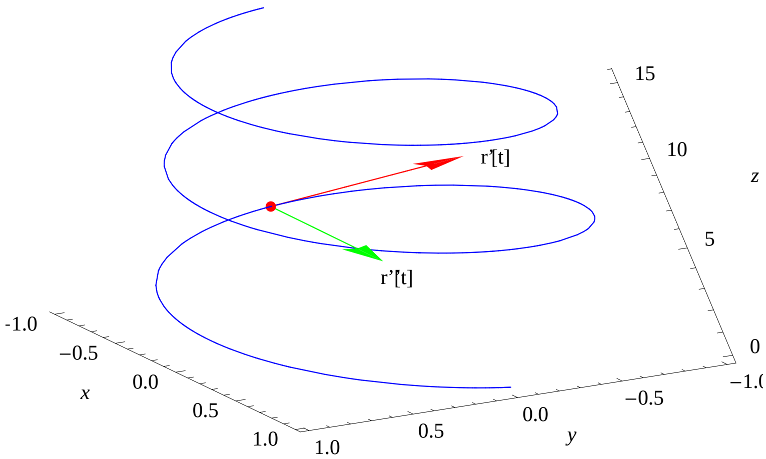


Чтобы построить винтовую линию, сначала конкретизируем ее уравнение:

```
r3d[t_]:=r3D[t] /. {R → 1,v → 1}
```

а затем уже построим:

```
Show[ParametricPlot3D[r3d[t],{t,0,5π},AspectRatio → 2/3,
  PlotStyle → Blue, Boxed → False, AxesLabel → {x,y,z}],
  Graphics3D[{Red,PointSize[Medium],Point[r3d[π]],
  Arrowheads[0.015],Arrow[{r3d[π],r3d[π] + r3d′[π]}],Green,
  Arrow[{r3d[π],r3d[π] + r3d″[π]}],Black,
  Text[’’r′[t]’’,{0.5,-0.45,9.5}],Text[’’r″[t]’’,{0.5,0.2,4}]}]]
```



Остается проверить, как *Mathematica* дифференцирует различные операции над ВФСА. Операция скалярного умножения векторов выполняется оператором `Dot`. Зададим два вектора (в виде списков) и найдем их скалярное произведение:

```
a = {u,v,w};
b = {p,q,s};
Dot[a,b]
pu + qv + sw
```

Эту операцию можно обозначать и обыкновенной точкой, которую ставят между векторами:

```
a.b
pu + qv + sw
```

Для вычисления векторного произведения служит оператор `Cross`:

```
Cross[a,b]
{sv - qw,-su + pw,qu - pv}
```

А можно набрать на клавиатуре (`Esc` `cross` `Esc`) косой крестик между векторами:

```
a×b
{sv - qw,-su + pw,qu - pv}
```

Проверим знание системой *Mathematica* правил дифференцирования:

```
∂t(r1[t] + r2[t])
r1′[t] + r2′[t]
∂t(u[t]r1[t])
```

```
u[t]r1′[t] + u′[t]r1[t]
∂t(r1[t].r2[t])
r1[t].r2′[t] + r1′[t].r2[t]
∂t(r1[t] × r2[t])
r1[t] × r2′[t] + r1′[t] × r2[t]
```

Как видим, с этим все в порядке.

Теперь посмотрим, как работает, например, правило, производной векторного произведения для конкретных ВФСА. Для этого введем их:

```
r1[t_]:={t^2 - 2,1 + t,-t^3 + t}
r2[t_]:={t + 2,1 - 2t^2,1 - t}
```

и найдем производную их векторного произведения:

```
∂t(r1[t] × r2[t])
{-1 - 2t + 9t^2 - 10t^4,-3t^2 - 4t^3,-3 + 8t - 8t^3}
```

Читатель имеет возможность проверить правильность выполненного системой *Mathematica* действия.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. — М.: Наука, 1984, — с. 190-194.

[2] Мантуров О.Н., Матвеев Н.М. *Курс высшей математики*. — М.: Высшая школа, 1986. — с. 249-254, 441-444.