УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА
ТА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
з дисципліни
«Вища математика»
для студентів спеціальності
«Автоматика та автоматизація на транспорті»

2006

Волченко Ю.М. Векторна алгебра та аналітична геометрія. Методичні рекомендації з дисципліни «Вища математика» – Донецьк: ДонІЗТ, 2006. – 100 с.

В компактному вигляді подано теоретичний матеріал з векторної алгебри та аналітичної геометрії. На меті було побудувати викладання навчального матеріалу на основі поняття вектора, яке має ключове значення для спеціальності АТЗ. Тому багато уваги приділяється доведенню наріжних математичних тверджень та встановленню зв'язків з подальшим розділом лінійної алгебри, найбільш пов'язаному з розглянутими питаннями. Для закріплення навчального матеріалу кожна тема методичних рекомендацій супроводжується низкою вправ для самостійної роботи студентів. Ці вправи продовжують і поглиблюють розглянутий теоретичний матеріал і тому можуть бути запропоновані для виконання студентам, бажаючим підвищити свої атестаційні бали.

Іл.: 61, бібліогр.: 10 найм.

Методичні матеріали розглянуті й рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 вересня 2005 р., протокол № 1. Рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету «Інфраструктура залізничного транспорту» 31.03.06, протокол № 2.

Рецензенти:

Проф. О.О. Ігнатьєв,
доц. А.М. Кремліна

Зміст

Розділ 1 Векторна алгебра та аналітична геометрія в програмі з вищої математики

1. Вектори. Лінійні операції над векторами.
2. Лінійна комбінація векторів.
3. Теореми розкладу векторів на площині і в просторі.
4. Лінійно незалежні системи векторів. Базис. Ортонормований базис.
5. Кут між векторами. Системи координат.
6. Скалярний добуток в $\mathbf{R}^3$ і його властивості.
7. Довжина вектора. Відстань.
8. Векторний добуток. Основні властивості.
9. Мішаний добуток і його властивості.
10. Геометричний зміст рівнянь з двома і трьома змінними. Алгебраїчні лінії й поверхні.
11. Рівняння прямої на площині.
12. Рівняння площини й прямої в просторі (векторна й координатна форми).
13. Лінії й поверхні другого порядку, їх канонічні рівняння й властивості.
14. Полярні координати.

2 Векторна алгебра

2.1 Вектори й відношення між ними

Вектором називається відрізок, кінці якого взяті в певному порядку: один кінець вважається першим і називається ***початком*** вектора, а другий кінець — ***кінцем*** вектора. Вектори позначаються або однією буквою: $\mathbf{a}$, або двома: $\mathbf{AB}$, де A — початок, а B — кінець вектора (рис. 2.1). Вектор напрямлен від початку до свого кінця.

Вектор називається ***нульовим***, якщо його початок і кінець збігаються. Нульовий вектор не має визначеного напряму і позначається $\mathbf{0}$.

Довжиною $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ називається відстань між його початком і кінцем. Довжина нульового вектора дорівнює нулеві: $|\mathbf{0}| = 0$.

Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ ***дорівнюють*** один одному і записують $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, якщо один з них можна дістати з другого паралельним переносом (рис. 2.1). Якщо вектори дорівнюють один одному, то вони однаково напрямлені і мають однакову довжину.

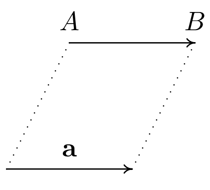

Рис. 2.1: $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$

Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають ***колінеарними*** і пишуть $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$, якщо вони розташовані на паралельних прямих, зокрема на одній і тій самій прямій. Нульовий вектор можна вважати колінеарним будь-якому вектору.

Колінеарні вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають ***співнапрямленими*** і пишуть $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, якщо після суміщення паралельним переносом початків векторів їхні кінці розташуються з одного боку від їх спільного початку (рис. 2.2).

Якщо кінці векторів розташуються по різні боки від їх спільного початку (рис. 2.2), то вектори називають ***протилежно напрямленими*** і пишуть $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$. Нульовий вектор можна вважати як співнапрямленим, так і протилежно напрямленим будь-якому вектору.

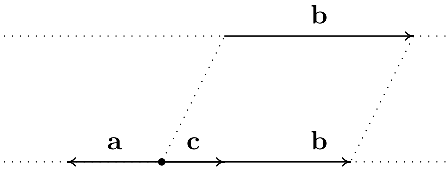

Рис. 2.2: $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$

Вектори **a**, **b** і **c** називають ***компланарними***, якщо вони містяться в паралельних площинах, зокрема в одній і тій самій площині (рис. 2.3). Нульовий вектор можна вважати компланарним будь-яким двом векторам.

2.2 Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називаються операції додавання векторів і множення вектора на число.

Додавання вектора **a** до вектора **b** за ***правилом трикутника*** полягає в тому, що треба паралельним переносом сумістити кінець вектора **a** з початком вектора **b** і провести вектор з початку вектора **a** в кінець вектора **b** (рис. 2.4, а)). Побудований таким чином вектор називається ***сумою*** векторів **a** і **b** і позначається $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Таким чином можна додавати будь-які вектори.

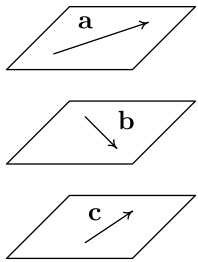

Рис. 2.3:

Додавання вектора **a** до вектора **b** за ***правилом паралелограма*** полягає в тому, що треба паралельним переносом сумістити початки векторів **a** і **b** і провести вектор-діагональ з їх спільного початку. Цей вектор буде сумою векторів **a** і **b** (рис. 2.4, б)). За правилом паралелограма можна додавати тільки неколінеарні вектори.

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

1°. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

2°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

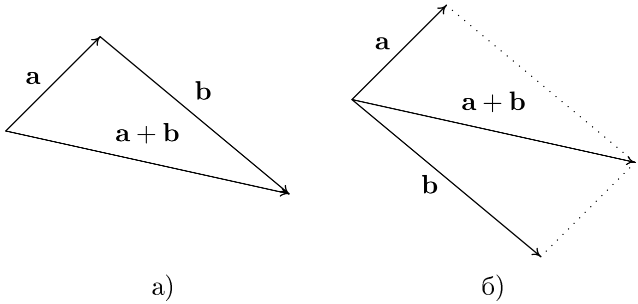

Рис. 2.4: Правила: а) трикутника, б) паралелограма

3° $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

Доведення виходить з рис. 2.5.

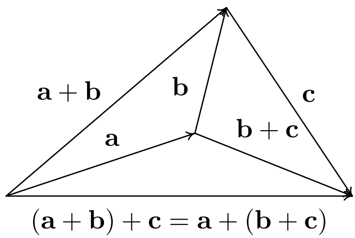

Рис. 2.5:

4° $\mathbf{a} \| \mathbf{b} \implies (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \| \mathbf{a}, \mathbf{b}$, *причому, якщо* $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, *то* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \uparrow\uparrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *і* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, *а, якщо* $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, *то* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *є співнапрямленим з максимальним за довжиною вектором* $\mathbf{a}$ *або* $\mathbf{b}$ *і* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$.

Вектором $-\mathbf{a}$, ***протилежним*** вектору $\mathbf{a}$, називається вектор, для якого 1) $(-\mathbf{a}) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, 2) $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ (рис. 2.6).

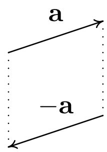

Рис. 2.6: Вектор $-\mathbf{a}$

ВЛАСТИВОСТІ ВЕКТОРА $-\mathbf{a}$

1°. *Для отримання вектора* $-\mathbf{a}$ *треба у векторі* $\mathbf{a}$ *поміняти місцями початок і кінець.*

2°. $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

3°. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

4°. $\mathbf{a} = -\mathbf{a} \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Різницею $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор, для якого $\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

Теорема 2.1. *Якщо сумістити початки векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *і провести вектор* $\mathbf{c}$ *з кінця вектора* $\mathbf{b}$ *в кінець вектора* $\mathbf{a}$, *то такий вектор буде різницею векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *(права частина рис. 2.7).*

Доведення. Дійсно, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ і тому $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. □

Теорема 2.2. *Для отримання вектора* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *треба до вектора* $\mathbf{a}$ *додати вектор* $-\mathbf{b}$ *(рис. 2.7).*

Доведення. $\mathbf{b} + [\mathbf{a} + (-\mathbf{b})] = \mathbf{b} + [(-\mathbf{b}) + \mathbf{a}] = [\mathbf{b} + (-\mathbf{b})] + \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$. □

Теорема 2.3. *Справедливі нерівності*

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \le |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\,.$$

Доведення. Випливає з властивості сторін трикутника: довжина сторони трикутника менш, ніж сума довжин двох інших сторін, але більш, ніж модуль їхньої різниці. □

2.2. Лінійні операції над векторами

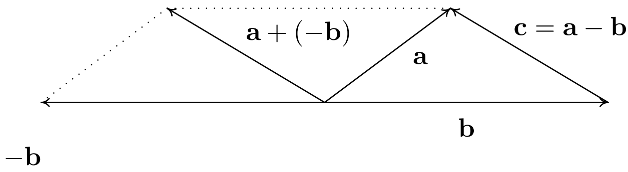

Рис. 2.7: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$

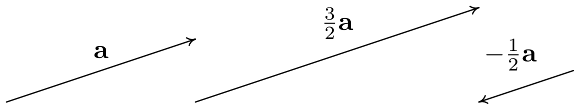

Рис. 2.8: Добуток вектора на число

Добутком вектора* $\mathbf{a}$ *на число λ називається вектор $\lambda\mathbf{a}$ такий, що 1) $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, 2) $(\lambda\mathbf{a})\parallel\mathbf{a}$, причому, якщо $\lambda>0$, то $(\lambda\mathbf{a})\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, а якщо $\lambda<0$, то $(\lambda\mathbf{a})\uparrow\downarrow\mathbf{a}$.

ВЛАСТИВОСТІ ДОБУТКУ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1°. $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}\Longleftrightarrow\lambda=\mathbf{0}\vee\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Необхідність. Припустимо супротивне: $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}\wedge\lambda\neq 0\wedge\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Тоді $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|\neq 0$. Це суперечить припущенню, що $\lambda\mathbf{a}$ — нульовий вектор. Достатність очевидна.

2°. $(-1)\,\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

Випливає з означення вектора $-\mathbf{a}$.

3°. $\lambda\,(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\,\mathbf{a}$.

Для $\lambda=0\vee\mu=0\vee\mathbf{a}=\mathbf{0}$ рівність очевидна. Розглянемо інші дві можливості. Нехай спочатку 1) $\lambda\mu>0$. Тоді $\lambda\,(\mu\mathbf{a})\uparrow\uparrow\mathbf{a}\wedge(\lambda\mu)\,\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$. Тепер нехай 2) $\lambda\mu<0$. Тоді $\lambda\,(\mu\mathbf{a})\uparrow\downarrow\mathbf{a}\wedge(\lambda\mu)\,\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$. В обох випадках $|\lambda\,(\mu\mathbf{a})|=$ $=|\lambda|\,|\mu\mathbf{a}|=|\lambda|\,|\mu|\,|\mathbf{a}|=|\lambda\mu|\,|\mathbf{a}|=|(\lambda\mu)\,\mathbf{a}|$.

4°. $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$.

Для $\lambda = -\mu \vee \lambda\mu = 0 \vee \mathbf{a} = \mathbf{0}$ рівність очевидна. Розглянемо дві можливості. Нехай спочатку 1) $\lambda\mu > 0$. Тоді $|(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}| = |\lambda+\mu|\,|\mathbf{a}| = (|\lambda|+|\mu|)\,|\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}| + |\mu|\,|\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}| + |\mu\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}|$, причому, для $\lambda > 0 \wedge \mu > 0$ маємо $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a} \wedge (\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}) \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, а для $\lambda < 0 \wedge \mu < 0$ маємо $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a} \wedge (\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Тепер нехай 2) $\lambda\mu < 0 \wedge |\lambda| > |\mu|$ (для визначеності). Тоді $|(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}| = |\lambda+\mu|\,|\mathbf{a}| = (|\lambda|-|\mu|)\,|\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}| - |\mu|\,|\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}| - |\mu\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}|$, причому, $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a} \uparrow\uparrow \lambda\mathbf{a} \wedge (\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}) \uparrow\uparrow \lambda\mathbf{a}$.

5° $\lambda\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

Розглянемо (рис. 2.9) два гомотетичних трикутника: $\triangle OAB$ і $\triangle OA'B'$ з коефіцієнтом гомотетії $\lambda < 0$.

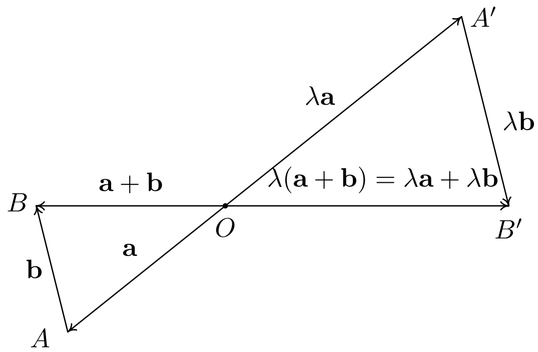

Рис. 2.9: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$

За законами гомотетії $OA' = -\lambda OA$, $OB' = -\lambda OB$, $A'B' = -\lambda AB$. Але $\mathbf{OA}+\mathbf{AB} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{OB}$, $\mathbf{OA}'+\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} = \mathbf{OB}' = \lambda\mathbf{OB} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Аналогічно доводиться твердження для $\lambda > 0$ і $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

6° *Якщо* $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *то існує єдине число* λ *таке, що* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, *причому,*

$$\lambda = \begin{cases} \ \ |\mathbf{b}|\,/\,|\mathbf{a}|\,, & \mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}, \\ -|\mathbf{b}|\,/\,|\mathbf{a}|\,, & \mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \end{cases}$$

Очевидно. Наприклад, для $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ маємо

$$\left|\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|\,,\ \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a} \Longrightarrow \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}.$$

Єдиність числа λ доведемо від супротивного. Нехай існує число $\mu \neq \lambda$ таке, що $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$. Віднімемо останню рівність від рівності $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, вийде $\mathbf{0} = (\lambda - \mu)\mathbf{a}$. Оскільки $\mu \neq \lambda$, то виходить, що $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Це суперечить умові властивості.

Вправа 2.1. *Розширити правило трикутника до правила многокутника для додавання більш, ніж двох векторів.*

Вправа 2.2. *Нехай* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *неколінеарні і* $\mathbf{BC} = 4(\beta\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\mathbf{AB} = \alpha\mathbf{a}/2$, $\mathbf{CD} = -4\beta\mathbf{b}$, $\mathbf{DA} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$. *Знайти* α *та* β *і довести, що* $\mathbf{BC} \| \mathbf{DA}$.

Вправа 2.3. *Три вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$ *є сторонами трикутника. Виразити медіани трикутника за допомогою цих векторів.*

Вправа 2.4. *Для умови попередньої задачі виразити медіани трикутника тільки через два вектори:* $\mathbf{a}$ *й* $\mathbf{b}$.

2.3 Теореми розкладу

Лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ називається вираз

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k,$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — дійсні числа, які називаються ***коефіцієнтами лінійної комбінації***. Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулеві; в супротивному випадку вона називається ***нетривіальною***.

Якщо вектор $\mathbf{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, то кажуть, що він ***розкладається*** за цими векторами. Вираз

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k$$

називають ***розкладом*** вектора $\mathbf{a}$ за векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — ***коефіцієнтами розкладу***.

Теорема 2.4 (розкладу на прямій)**.** *Будь-який вектор, колінеарний ненульовому вектору, розкладається за останнім і такий розклад єдиний.*

Доведення. Нехай вектор $\mathbf{a_1} \neq \mathbf{0}$, а вектор $\mathbf{a} \| \mathbf{a_1}$. З властивості 6 добутку вектора на число виходить, що існує єдине число λ_1 таке, що $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a_1}$. □

Теорема 2.5 (розкладу на площині)**.** *Будь-який вектор, компланарний двом неколінеарним векторам, розкладається за ними і такий розклад єдиний.*

Доведення. Нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарні, причому, вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ неколінеарні. Паралельним переносом сумістимо початки цих векторів в точці O (рис. 2.10).

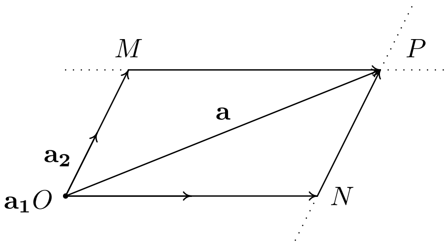

Рис. 2.10: Розклад на площині

Через кінець P вектора $\mathbf{a}$ проведемо прямі, паралельні векторам $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. Якщо вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ не перетинаються з прямими, продовжимо їх до перетину з цими прямими і нехай N — точка перетину вектора $\mathbf{a}_1$ або його продовження з прямою, а M — така ж точка для $\mathbf{a}_2$. Чотирикутник $OMPN$ — паралелограм. Тоді, оскільки $\mathbf{MP} \parallel \mathbf{a}_1$, $\mathbf{NP} \parallel \mathbf{a}_2$, дістаємо $\mathbf{MP} =\lambda\mathbf{a}_1$, $\mathbf{NP} = \mu\mathbf{a}_2$. Звідси й виходить розклад вектора $\mathbf{a}$ за векторами $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{OM} + \mathbf{ON} = \mathbf{MP} + \mathbf{NP} = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2.$$

Доведемо, що цей розклад єдиний. Припустимо супротивне: вектор $\mathbf{a}$ має ще один розклад:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2,$$

причому, наприклад, $\alpha \neq \lambda$. Віднімемо останні два рівняння:

$$\mathbf{0} = (\lambda - \alpha)\,\mathbf{a}_1 + (\mu - \beta)\,\mathbf{a}_2.$$

Звідси знаходимо, що

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{(\mu - \beta)}{(\lambda - \alpha)}\mathbf{a}_2.$$

Це суперечить неколінеарності векторів $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. □

Теорема 2.6 (розкладу у просторі)**.** *Будь-який вектор розкладається за трьома некомпланарними векторами і такий розклад єдиний.*

Доведення. Нехай вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ некомпланарні, а вектор $\mathbf{a}$ — будь-який. Паралельним переносом сумістимо початки цих векторів в точці O (рис. 2.11).

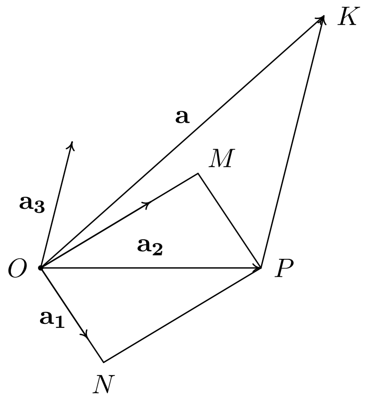

Рис. 2.11: Розклад у просторі

Через кінець K вектора $\mathbf{a}$ проведемо пряму, паралельну $\mathbf{a}_3$ до перетину з площиною, в якій розташовані вектори $\mathbf{a}_1$і $\mathbf{a}_2$ ($\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ неколінеарні). Нехай P — точка перетину. Вектор $\mathbf{OP}$ компланарний неколінеарним векторам $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. За попередньою теоремою він має розклад за цими векторами: $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2$. Оскільки $\mathbf{PK} \parallel \mathbf{a}_3$, то $\mathbf{PK} = \rho\mathbf{a}_3$. Тоді $\mathbf{a} = \mathbf{OP} + \mathbf{PK} = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2 + \rho\mathbf{a}_3$.

Доведемо, що цей розклад єдиний. Припустимо супротивне: вектор $\mathbf{a}$ має ще один розклад:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 + \gamma\mathbf{a}_3,$$

причому, наприклад, $\alpha \neq \lambda$. Віднімемо останні два рівняння:

$$\mathbf{0} = (\lambda - \alpha)\,\mathbf{a}_1 + (\mu - \beta)\,\mathbf{a}_2 + (\rho - \gamma)\,\mathbf{a}_3.$$

Виходить така рівність:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{(\mu - \beta)}{(\lambda - \alpha)}\mathbf{a}_2 - \frac{(\rho - \gamma)}{(\lambda - \alpha)}\mathbf{a}_3. \tag{2.1}$$

Якщо вектори $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ колінеарні, то права частина цієї рівності їм теж колінеарна. Це означає, що вектор $\mathbf{a}_1$ колінеарний векторам $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$. Тоді він їм і компланарний.

Якщо $\mathbf{a}_2 \nparallel \mathbf{a}_3$, то права частина (2.1) належить тій самій площині, якій належать вектори $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$, якщо сумістити їх початки. Таким чином, вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ компланарні. Це суперечить умові теореми і доводить єдиність розв'язку. □

Вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо тільки їх тривіальна лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору. В супротивному випадку вони називаються ***лінійно залежними***. Якщо вектори лінійно залежні, відшукається їх нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює нульовому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Це означає, що хоча б один з коефіцієнтів лінійної комбінації (наприклад, λ_1) не дорівнює нулеві. Тоді вектор $\mathbf{a}_1$ можна виразити через інші вектори:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n, \tag{2.3}$$

тобто дістати його лінійну залежність від цих векторів. Якщо ж вектори лінійно незалежні, зробити це не вдасться, бо в рівності (2.2) всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулеві.

Теорема 2.7. *Система з одного вектора лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли цей вектор нульовий.*

Доведення. Необхідність. Лінійна залежність в даному випадку означає, що виконується рівність $\lambda_1\mathbf{a_1} = \mathbf{0}$, причому $\lambda_1 \neq 0$. Тоді $\mathbf{a_1} = \mathbf{0}$.

Достатність. Нехай $\mathbf{a_1} = \mathbf{0}$. Тоді нетривіальна лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору: $1 \cdot \mathbf{a_1} = \mathbf{0}$. З цього випливає, що вектор $\mathbf{a_1}$ утворює залежну лінійну комбінацію. □

Висновок 2.1. *Для векторів на прямій система з одного вектора тоді й тільки тоді буде лінійно незалежною, коли цей вектор ненульовий.*

В методичних рекомендаціях [5] доведені такі теореми.

Теорема 2.8. *Два вектори на площині лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.*

Висновок 2.2. *Два вектори на площині лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли вони неколінеарні.*

Теорема 2.9. *Три вектори в просторі лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.*

2.3. Теореми розкладу

Висновок 2.3. *Три вектори в просторі лінійно-незалежні тоді й тільки тоді, коли вони некомпланарні.*

З розглянутих тверджень можна зробити ще один висновок: на прямій, площині або в просторі будь-який вектор можна розкласти за відповідною лінійно-незалежною системою векторів.

Вправа 2.5. *Розкласти вектор* $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ *по трьом некомпланарним векторам* $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

Вправа 2.6. *Довести, що будь-яка система з* $n \geq 4$ *векторів лінійно залежна.*

Вправа 2.7. *Відомі розклади двох векторів* $\mathbf{p}$ *і* $\mathbf{q}$ *по трьом некомпланарним векторам* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$*:*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c}, \\ \mathbf{q} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Яка залежність повинна існувати між коефіцієнтами цих розкладів, якщо 1) $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, *2)* $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$, *3)* $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$*?*

2.4 Базиси

Кут $\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ ***між векторами*** $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ (рис. 2.12) означається таким чином: 1) кут не визначений, якщо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, або $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; 2) кут дорівнює найменшому невід'ємному куту між прямими, на яких розташовані вектори, якщо сумістити їхні початки.

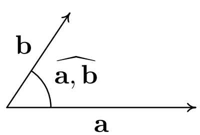

Рис. 2.12: Кут між векторами

ВЛАСТИВОСТІ КУТА МІЖ ВЕКТОРАМИ

1°. $0 \le \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} \le \pi$.

2°. $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{b},\mathbf{a}}$.

3°. $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$.

4°. $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \pi \Longleftrightarrow \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Базисом називається система з лінійно незалежних упорядкованих векторів.

З попереднього випливає, що базисом на прямій є будь-який ненульовий вектор $\mathbf{e}$, що належить цій прямій. Базис позначається $<\mathbf{e}>$ і вектор $\mathbf{e}$ називається ***базисним***.

На площині базисом є будь-яка пара неколінеарних упорядкованих векторів, що належать цій площині. Базис на площині позначається $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>$, де $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — неколінеарні вектори, які називають ***базисними***. З упорядкованості векторів базису випливає, що на площині базиси $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2>$ і $<\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1>$ — різні. Нехай початки векторів $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ суміщені паралельним переносом і φ — кут повороту (проти годинникової стрілки) вектора $\mathbf{e}_1$ до суміщення з вектором $\mathbf{e}_2$. Якщо $0 < \varphi < \pi$, то базис називається ***правим***, а для $-\pi < \varphi < 0$ базис називається ***лівим*** (рис. 2.13).

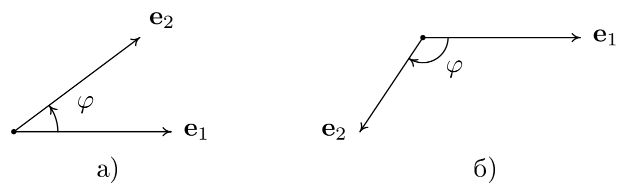

Рис. 2.13: Базиси на площині: а) правий, б) лівий

Візьмемо упорядковану трійку векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, початки яких суміщені паралельним переносом. Така трійка векторів називається ***правою***, якщо з кінця вектора $\mathbf{c}$ поворот від вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ на кут $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ спостерігається виконуваним проти годинникової стрілки. В супротивному випадку трійка векторів називається ***лівою***.

В просторі базисом є трійка будь-яких упорядкованих некомпланарних векторів: $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3>$. Ці вектори називають ***базисними***. Враховуючи упорядкованість базисних векторів, з трьох некомпланарних векторів можна скласти шість різних базисів. Базис називається ***правим***, якщо його вектори утворюють праву трійку векторів, і ***лівим*** — якщо ліву (рис. 2.14). І на площині, і в просторі звичайно використовуються праві базиси.

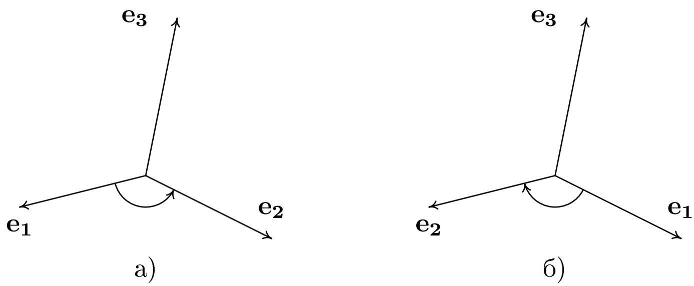

Рис. 2.14: Базиси в просторі: а) правий, б) лівий

За теоремою про розклад вектора у просторі виходить, що будь-який вектор $\mathbf{a}$ у просторі може бути розкладеним за векторами базису:

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3,$$

і такий розклад єдиний. Таким чином, встановлюється взаємно однозначна відповідність між векторами в просторі і трійками чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Це дозволяє ввести «дужковий запис вектора»:

$$\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \stackrel{\triangle}{=} \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3.$$

Аналогічно записуються вектори на площині:

$$\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2) \stackrel{\triangle}{=} \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називають ***компонентами*** або ***координатами*** вектора $\mathbf{a}$.

ПОКОМПОНЕНТНИЙ ЗАПИС ВЛАСТИВОСТЕЙ ВЕКТОРІВ І ЛІНІЙНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД НИМИ

Нехай в ортонормованому базисі $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$ задані два вектори $\mathbf{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ і $\mathbf{b} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

1°. *Для додавання (віднімання) двох векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *треба додати (відняти) їхні відповідні компоненти:*

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (\lambda_1 \pm \mu_1, \lambda_2 \pm \mu_2, \lambda_3 \pm \mu_3) \,.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3) \pm (\mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e}_3) = \\ &= (\lambda_1 \pm \mu_1)\, \mathbf{e}_1 + (\lambda_2 \pm \mu_2)\, \mathbf{e}_2 + (\lambda_3 \pm \mu_3)\, \mathbf{e}_3 = \\ &= (\lambda_1 \pm \mu_1, \lambda_2 \pm \mu_2, \lambda_3 \pm \mu_3) \,. \end{aligned}$$

2°. *Для множення вектора на число треба на це число помножити всі його компоненти:*

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \lambda\lambda_3) \,.$$

Доводиться аналогічно попередній властивості.

3°. *Вектор тоді й тільки тоді має нульові компоненти, коли він нульовий:*

$$\mathbf{a} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Необхідність. Якщо $\mathbf{z} = (0, 0, 0)$, то для будь-якого вектора $\mathbf{a}$ маємо

$$\mathbf{z} + \mathbf{a} = (0 + \lambda_1, 0 + \lambda_2, 0 + \lambda_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathbf{a}.$$

А це означає, що $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Достатність. Для нульового вектора дістаємо:

$$\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = (\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

4°. *Вектори тоді й тільки тоді дорівнюють один одному, коли мають однакові відповідні компоненти:*

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3.$$

Дійсно,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \lambda_3 - \mu_3) = (0, 0, 0) \,.$$

Тоді з попередньої властивості випливає, що $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0$, $\lambda_3 - \mu_3 = 0$, і, таким чином, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$.

2.4. Базиси

5°. *Вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли їхні компоненти пропорційні:*

$$\mathbf{a} \| \mathbf{b} \Longleftrightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3},$$

причому, вважається, що відношення $\frac{0}{0}$ *не порушує пропорційності. Ця властивість уточнюється таким чином:*

$$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b} \Longleftrightarrow \exists\,(i)\, \frac{\lambda_i}{\mu_i} > 0,\ \lambda_i, \mu_i \neq 0,$$
$$\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b} \Longleftrightarrow \exists\,(i)\, \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 0,\ \lambda_i, \mu_i \neq 0.$$

Якщо $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, то їхні компоненти нульові і за домовленістю властивість виконується. Нехай тепер $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тоді існує число λ таке, що $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, або $\mu_1 = \lambda\lambda_1$, $\mu_2 = \lambda\lambda_2$, $\mu_3 = \lambda\lambda_3$. Це й доводить властивість.

2.5 Системи координат

Кажуть, що на прямій ***задано напрям***, якщо вказано вектор, розташований на цій прямій. Цей вектор називається ***напрямним вектором*** прямої.

Віссю називається пряма, на якій задано напрям. Вісь часто зображують за допомогою стрілки, яка показує такий самий напрям, що й напрямний вектор (рис. 2.15).

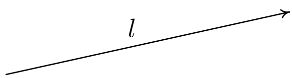

Рис. 2.15: Вісь l

Ортом осі називається вектор одиничної довжини (одиничний вектор), напрям якого збігається з напрямом осі. Якщо напрям на осі задано вектором $\mathbf{a}$, то її ортом буде вектор $\mathbf{e} = \mathbf{a}/\,|\mathbf{a}|$. Вектор $\mathbf{e}$ називають також ортом вектора $\mathbf{a}$.

Кутом між вектором* a *і віссю l називається кут між вектором $\mathbf{a}$ і ортом $\mathbf{e}$ осі l: $\widehat{\mathbf{a}, l} \stackrel{\triangle}{=} \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{e}}$.

Афінною системою координат називається сукупність точки O (***початок координат***) і базису $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$. Нехай M — деяка точка, тоді вектор $\mathbf{OM}$ називається її ***радіус-вектором***. ***Координатами***

точки в афінній системі координат називаються компоненти її радіус-вектора. Якщо $\mathbf{OM} = (x, y, z)$, то точка зі своїми координатами позначається як $M(x, y, z)$ (рис. 2.16). Координата x називається ***абсцисою***, y — ***ординатою***, а z — ***аплікатою*** точки M. Початок координат має нульові координати: $O\,(0, 0, 0)$.

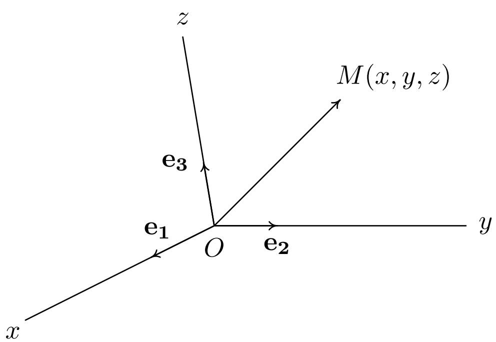

Рис. 2.16: Система координат

Осі, що виходять з початку координат і паралельні базисним векторам, називаються ***координатними осями*** і мають уточнюючі назви, що відповідають назвам координат точки. Так, наприклад, вісь, паралельна базисному вектору $\mathbf{e}_1$, називається віссю абсцис.

Базис $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$ називається ***ортогональним***, якщо базисні вектори парами перпендикулярні. Ортогональний базис називається ***ортонормованим***, якщо базисні вектори мають одиничну довжину.

Афінна система координат з ортонормованим базисом називається ***декартовою прямокутною*** (або просто ***декартовою) системою координат***. Її базис позначається $< \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} >$.

Якщо хоча б один кут між парами базисних векторів не дорівнює $\pi/2$, то система координат називається ***косокутною***.

2.6 Вектори в декартовій системі координат

Нехай $A\,(x_A, y_A, z_A)$, $B\,(x_B, y_B, z_B)$ — довільні точки, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — довільний вектор.

1° *Для отримання компонент вектора, заданого координатами початку й кінця, треба від координат кінця відняти координати початку:*

$$\mathbf{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)\,.$$

Виходить з того, що

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} &= (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)\,,\end{aligned}$$

див. рис. 2.17.

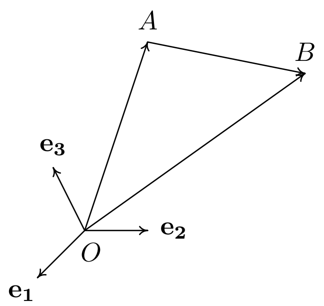

Рис. 2.17: До властивості 1

2° *Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів його компонент:*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Сумістимо початок вектора $\mathbf{a}$ з початком системи координат і позначимо $\mathbf{OM} = a_1\mathbf{i}$, $\mathbf{MN} = a_2\mathbf{j}$, $\mathbf{NP} = a_3\mathbf{k}$. Тоді $|\mathbf{a}|$ буде довжиною діагоналі прямокутного паралелепіпеда (див рис. 2.18), для якого виконується рівність

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{OM} + \mathbf{MN} + \mathbf{NP}.$$

Таким чином,

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{OP}| = \sqrt{OM^2 + MN^2 + NP^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

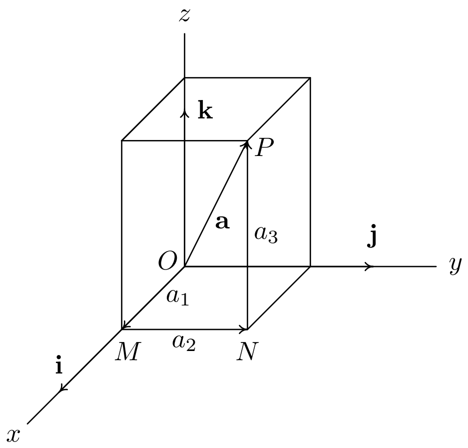

Рис. 2.18: Довжина вектора $\mathbf{a}$

3°. *Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному з суми квадратів різниць відповідних координат точок:*

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Випливає з попередніх властивостей.

Вправа 2.8. *Задані вектори* $\mathbf{a} = (1; 5; 3)$, $\mathbf{b} = (6; -4; -2)$, $\mathbf{c} = (0; -5; 7)$ *і* $\mathbf{d} = (-20; 27; -35)$. *Треба підібрати числа* α, β *і* γ *так, щоб вектори* $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ *і* $\mathbf{d}$ *утворювали замкнену ламану лінію, якщо початок кожного подальшого вектора сумістити з кінцем попереднього.*

Вправа 2.9. *Що можна стверджувати відносно розташування трьох точок* $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ *і* $C(\mathbf{r}_3)$, *якщо їх радіус-вектори пов'язані співвідношенням:* $\alpha\mathbf{r}_1 + \beta\mathbf{r}_2 + \gamma\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$, *причому* $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Вправа 2.10. *Задані перші дві компоненти* $x = 3$, $y = -9$ *вектора* $\mathbf{p}$ *і його модуль* $|\mathbf{p}| = 12$. *Знайти цей вектор.*

2.7 Полярна система координат

Полярною системою координат на площині називається сукупність таких об'єктів площини: точки P, що називається ***полюсом***; та осі p, яка виходить з полюса, і називається ***полярною віссю***. Координатами точки M вважають дві величини: ***полярний радіус*** $\rho \geq 0$, який є відстанню від точки M до полюса P; і ***полярний кут*** φ, який є кутом між полярною віссю і відрізком OM (рис. 2.19).

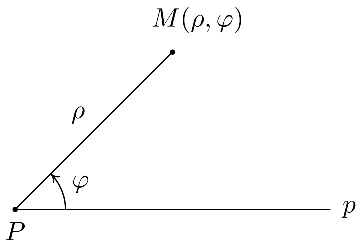

Рис. 2.19: Полярна система координат

Цей кут найчастіше вимірюється в радіанах і проти годинникової стрілки. Для $\rho = 0$ кут φ не визначений (в більшості випадків точку M в такому разі ототожнюють з полюсом), а для інших значень радіуса визначається з точністю до кута $2\pi k$, $k \in Z$. Звичайно полярний кут обмежується діапазоном значень $[0; 2\pi)$, або $(-\pi, \pi]$. Це усуває неоднозначність.

Введемо на площині з полярною системою координат ще й декартову систему координат, сумістив її початок O з полюсом, а додатну піввісь Ox — з полярною віссю. З рис. 2.20 бачимо, що декартові координати (x, y)

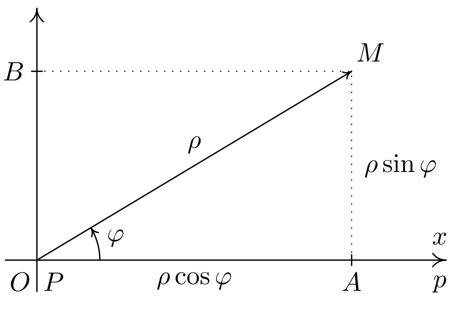

Рис. 2.20: Полярні й декартові координати

точки M виражаються через її полярні координати (ρ, φ) за формулами

$(x = OA,\ y = OB)$:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{2.5}$$

В свою чергу полярні координати виражаються через декартові таким чином ($\varphi \in [0; 2\pi)$):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \begin{cases} \text{не визначений}; & x = 0,\ y = 0; \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0,\ y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}; & x = 0,\ y < 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x > 0,\ y > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x < 0; \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Це випливає за теоремою Піфагора з трикутника OMA: $OM^2 = OA^2 + AM^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Крім того,

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Деякі криві в полярній системі координат мають більш прості рівняння, ніж в декартовій системі координат.

Приклад 2.1. *Записати в полярній системі координат рівняння кола, яке в декартовій системі координат має рівняння $x^2 + y^2 = R^2$.*

Розв'язання. Підставимо в задане рівняння кола замість x і y їх вирази з формул (2.5):

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &= R^2, \\ \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) &= R^2, \\ \rho^2 &= R^2, \\ \rho &= R. \end{aligned}$$

Останнє рівняння і є рівнянням кола в полярній системі координат. □

Вправа 2.11. *Вивести формулу відстані між двома точками $A(\rho_1, \varphi_1)$ і $B(\rho_2, \varphi_2)$ в полярній системі координат.*

Вправа 2.12. *Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі, дві інші суть точки $A(\rho_1, \varphi_1)$ і $B(\rho_2, \varphi_2)$. Знайти площу цього трикутника.*

Вправа 2.13. *В полярній системі координат вивести рівняння кола радіуса R з центром в точці $C(\rho_0, \varphi_0)$.*

2.8 Поділ відрізка у заданому відношенні

Кажуть, що точка M ***ділить відрізок*** AB ***у відношенні*** λ, якщо

$$\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{MB}.$$

Оскільки для відрізка точки A й B різні, то $\lambda \neq -1$.

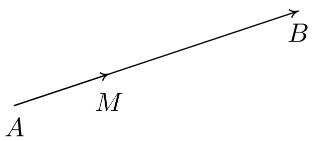

Рис. 2.21: $\lambda > 0$

Теорема 2.10. *Для відрізка, заданого своїми кінцями $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, координати точки $M(x_M, y_M, z_M)$, що належить прямій, на якій знаходиться відрізок AB, відшукуються з формул*

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Доведення. З рівності $\mathbf{AM} = \lambda \mathbf{MB}$ виходить, що

$$\begin{aligned} &x_M - x_A = \lambda(x_B - x_M),\ y_M - y_A = \lambda(y_B - y_M), \\ &z_M - z_A = \lambda(z_B - z_M). \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно координат точки M, дістаємо шукане. □

Висновок 2.4. *Координати середини відрізка, які відповідають значенню $\lambda = 1$, можна знайти за формулами*

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

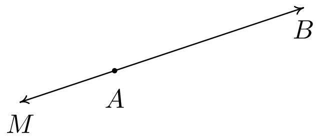

Рис. 2.22: $\lambda < 0$

Якщо $\lambda > 0$ (M належить відрізку AB), то кажуть, що точка M ділить відрізок AB внутрішнім способом.

Якщо $\lambda < 0$ (M належить продовженню відрізка), то кажуть, що точка M ділить відрізок AB зовнішнім способом (рис. 2.22).

Вправа 2.14. *Знайти вершини трикутника, якщо середини його сторін такі:* $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ *і* $R(-4;2)$.

Вправа 2.15. *Задано вершини однорідної трикутної платівки* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *і* $C(x_3, y_3)$. *Визначити координати її центра мас.*

В к а з і в к а. Центр мас знаходиться в точці перетину медіан.

Вправа 2.16. *Задано вершини однорідної трикутної платівки* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *і* $C(x_3, y_3)$. *Якщо сполучити середини її сторін, то утворюється нова однорідна трикутна платівка. Довести, що центри мас обох платівок збігаються.*

В к а з і в к а. Використати результат попередньої вправи.

2.9 Скалярний добуток векторів

2.9.1 Означення й властивості

Скалярним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається число

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \triangleq \begin{cases} 0, & \mathbf{a} = \mathbf{0} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}; \\ |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Скалярний добуток векторів позначають також $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

ВЛАСТИВОСТІ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

1° $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

Очевидно.

2° $\lambda\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)=\left(\lambda\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\left(\lambda\mathbf{b}\right).$

Для $\lambda>0$ маємо $\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}=\widehat{\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}}=\widehat{\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}}$, а для $\lambda<0$ справедливо $\widehat{\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}}=$ $=\widehat{\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}}=\pi-\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}$. В останньому випадку

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}&=|\lambda\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\widehat{\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}}=-\lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\left(\pi-\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right)=\\&=\lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}=\lambda\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right).\end{aligned}$$

3° $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

Ліва частина рівності перетворюється на

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}},$$

а права частина — на

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}&=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}+|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\cos\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}=\\&=|\mathbf{c}|\left(|\mathbf{a}|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}+|\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}\right).\end{aligned}$$

Таким чином, треба довести, що

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}}=|\mathbf{a}|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}+|\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}.$$

Але це випливає з рис. 2.23 (вектори не обов'язково компланарні), бо

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}}=AD$$

і

$$|\mathbf{a}|\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{c}}+|\mathbf{b}|\cos\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}=AF+BE=AF+FD=AD.$$

4° $0\le\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}<\frac{\pi}{2}\iff\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0,\ \frac{\pi}{2}<\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\le\pi\iff\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0.$

Очевидно.

5° $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2.$

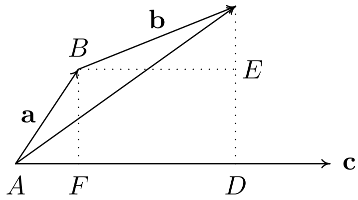

Рис. 2.23: Доведення властивості 3

Дійсно, $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2$.

Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називаються ***ортогональними*** (позначається $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), якщо їх скалярний добуток дорівнює нулеві: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Таким чином,

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} = 0 \vee \mathbf{b} = 0 \vee \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \frac{\pi}{2}.$$

З означення скалярного добутку випливають формули

$$\cos \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|},$$
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

2.9.2 Скалярний добуток в ортонормованому базисі

В ортонормованому базисі $< \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} >$ скалярний добуток векторів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ обчислюється за формулою

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

бо

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ = a_1 b_1 \mathbf{i}^2 + a_1 b_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_2 b_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2 b_2 \mathbf{j}^2 + a_2 b_3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + \\ + a_3 b_1 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_3 b_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_3 b_3 \mathbf{k}^2.\end{aligned}$$

Оскільки квадрати одиничних векторів дорівнюють одиниці, а скалярні добутки різних базисних векторів — нулеві, то й виходить доводжувана формула.

Тому довжина вектора в такому базисі дорівнює

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ визначається з рівності

$$\cos\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

а умова ортогональності векторів набирає вигляду

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

2.9.3 Проекція вектора на вісь (на вектор)

Скалярною проекцією вектора $\mathbf{a}$ на вісь l (на вектор $\mathbf{b}$) називається скалярний добуток вектора $\mathbf{a}$ на орт осі $\mathbf{e}$ (на орт вектора $\mathbf{b}$):

$$\mathrm{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e},\ \mathrm{Pr}_{\,\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

(див рис. 2.24).

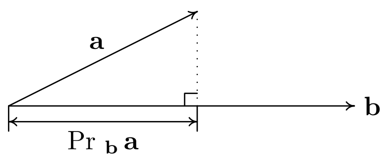

Рис. 2.24: Скалярна проекція вектора

Векторною проекцією вектора $\mathbf{a}$ на вісь l (на вектор $\mathbf{b}$) називається скалярний добуток вектора $\mathbf{a}$ на орт осі $\mathbf{e}$ (на орт вектора $\mathbf{b}$), помножений на орт $\mathbf{e}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{l}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e},\ \overrightarrow{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \left(\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЇ

1° *Скалярний множник можна виносити з-під знаку проекції:*

$$\mathrm{Pr}_{\,l}\,(\lambda \mathbf{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a}.$$

Випливає з аналогічної властивості скалярного добутку.

2° *Проекція суми векторів дорівнює сумі їхніх проекцій:*

$$\mathrm{Pr}_{\,l}\,(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \mathrm{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a}_2 + \cdots + \mathrm{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a}_k.$$

Випливає з відповідної властивості скалярного добутку.

3° *В ортонормованому базисі компоненти вектора* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *є його проекціями на координатні осі:*

$$a_1 = \mathrm{Pr}_{\,Ox}\,\mathbf{a},\ a_2 = \mathrm{Pr}_{\,Oy}\,\mathbf{a},\ a_3 = \mathrm{Pr}_{\,Oz}\,\mathbf{a}.$$

Дійсно, нехай ортонормований базис має вигляд $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$. Тоді $\mathrm{Pr}_{\,Ox}\,\mathbf{a} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_1 = a_1$.

4° *В ортонормованому базисі одиничний вектор* $\mathbf{a}$ *має вигляд* $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *де* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *— так звані* ***напрямні косинуси*** *осі (вектора* $\mathbf{a}$, *а також будь-якого вектора* $\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$*), на якій міститься вектор* $\mathbf{a}$, *причому,*

$$\alpha = \widehat{\mathbf{a}, Ox},\ \beta = \widehat{\mathbf{a}, Oy},\ \gamma = \widehat{\mathbf{a}, Oz},$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

рис. 2.25.

З попередньої властивості випливає, що для ортонормованого базису $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >$ і одиничного вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ його перша компонента $a_1 = \mathrm{Pr}_{\,Ox}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1 = \underbrace{|a_1|}_{1}\,\underbrace{|\mathbf{e}_1|}_{1}\cos\alpha = \cos\alpha$. Аналогічно для решти компонент.

2.9.4 Застосування скалярного добутку

Робота сили $\mathbf{F}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж відрізка переміщення $\mathbf{MN}$ дорівнює скалярному добутку сили на вектор переміщення:

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{MN} = \mathrm{Pr}_{\,\mathbf{MN}}\,\mathbf{F}\cdot|\mathbf{MN}|\,.$$

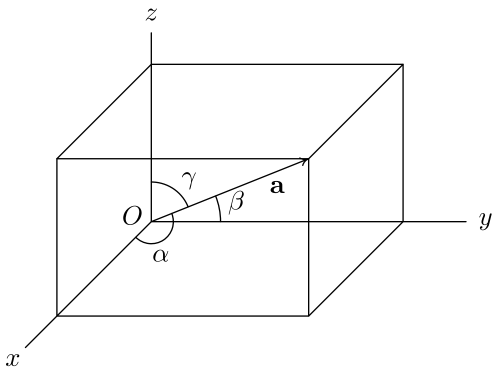

Рис. 2.25: До напрямних косинусів

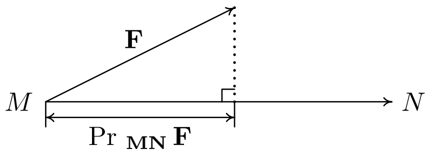

Рис. 2.26: Робота сили

Тобто така робота дорівнює проекції сили на напрям переміщення, скалярно помноженої на довжину вектора переміщення (рис. 2.26).

Нехай крізь площинку $\mathbf{S}$ зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ рухається газ або рідина. Потоком П цього газу або рідини крізь площинку $\mathbf{S}$ в напрямі вектора $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{S}$, називається скалярний добуток вектора $\mathbf{v}$ на вектор $\mathbf{n}$, помножений на площину площинки (рис. 2.27):

$$\Pi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot \text{пл.}\mathbf{S} = \text{Pr}_{\,\mathbf{n}}\mathbf{v} \cdot \text{пл.}\mathbf{S}.$$

Оскільки $h = \text{Pr}_{\,\mathbf{n}}\mathbf{v}$ є висотою циліндра, що має основою площинку $\mathbf{S}$, то потік дорівнює кількості газу або рідини, що протікає крізь $\mathbf{S}$ в напрямі $\mathbf{n}$ за одиницю часу.

Вправа 2.17. *Знайти кут між одиничними векторами* $\mathbf{e_1}$ *і* $\mathbf{e_2}$, *якщо відома перпендикулярність векторів* $\mathbf{a} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2}$ *і* $\mathbf{b} = 5\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_2}$.

2.9. Скалярний добуток векторів

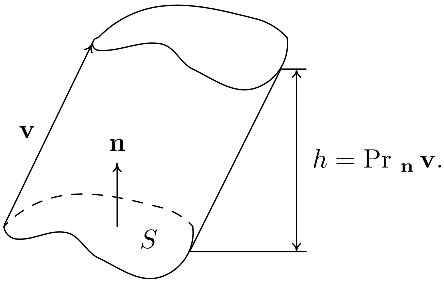

Рис. 2.27: Потік крізь площинку

Вправа 2.18. *Вивести формулу скалярного добутку двох векторів у косокутній системі координат.*

Вправа 2.19. *Позначити через* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *сторони ромба, які виходять зі спільної вершини, і довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.*

Вправа 2.20. *Знайти проекцію вектора* $\mathbf{a}$ *на вісь, що має з координатними осями рівні гострі кути.*

Вправа 2.21. *Довести, що*

$$\text{Pr}_{\,\mathbf{a}}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \neq \text{Pr}_{\,\mathbf{a}}\,\mathbf{b} + \text{Pr}_{\,\mathbf{a}}\,\mathbf{c}.$$

Вправа 2.22. *Знаючи проекції векторів на одну й ту саму вісь:*

$$\text{Pr}_{\,l}\,\mathbf{a} = 5,\ \ \text{Pr}_{\,l}\,\mathbf{b} = -3,\ \ \text{Pr}_{\,l}\,\mathbf{c} = -8,\ \ \text{Pr}_{\,l}\,\mathbf{d} = 6,$$

чи можна вважати, що ці вектори утворюють замкнену ламану лінію?

2.10 Векторний добуток векторів

2.10.1 Означення й властивості

Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, який задовольняє умовам (див. рис. 2.28):

$$1)\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{a}=\mathbf{0} \vee \mathbf{b}=\mathbf{0}; \\ |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}, & \mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0}. \end{cases}$$

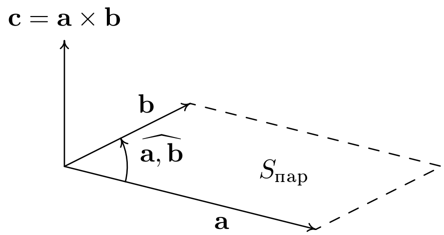

Рис. 2.28: Векторний добуток

2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$,

3) Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток також позначається $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Якщо вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ неколінеарні, то модуль їхнього добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах (рис. 2.28), а також дорівнює подвоєній площі трикутника, так само побудованого на $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$:

$$S_{\text{пар}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$$
$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

ВЛАСТИВОСТІ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

1°. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Необхідність. Якщо $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = 0$. Це можливо тільки тоді, коли або $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, або $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, або $\sin \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ дорівнює нулю, або π. В усіх цих випадках вектори $\mathbf{a}$ й $\mathbf{b}$ колінеарні.

Достатність. Нехай $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Тоді або $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, або $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, або $\sin \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ дорівнює нулю, або π. В кожному разі $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ за означенням векторного добутку.

2°. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

З означення векторного добутку випливає, що його модуль не залежить від порядку множників. Оскільки вектори $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ перпендикулярні одній і тій самій площині, що визначається векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то вони колінеарні. Але вони протилежно напрямлені, бо праві трійки утворюють саме вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $-\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

3°. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Без доведення.

4°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Без доведення.

5°. *Для декартових ортів* $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.

Властивість є наслідком означення векторного добутку і попередніх властивостей. Рис. 2.29 допомагає її запам'ятати: якщо йти від одного вектора до другого за стрілкою, то їх векторний добуток дорівнюватиме третьому вектору, а якщо йти проти стрілки, то векторний добуток дорівнюватиме третьому вектору, перед яким треба поставити знак «мінус».

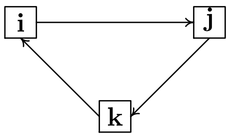

Рис. 2.29: До властивості 5

6°. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$,

бо, наприклад, $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \neq -\mathbf{k} = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$.

2.10.2 Векторний добуток в ортонормованому базисі

В ортонормованому базисі $< \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} >$ векторний добуток векторів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ обчислюється за формулою

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

оскільки, використовуючи попередню властивість, маємо

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) =$$
$$= a_1 b_1 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \times \mathbf{k} +$$

$$
\begin{aligned}
&+a_2b_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\\
&+a_3b_1\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\\
=&\,(a_2b_3-a_3b_2)\,\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\mathbf{k}=\\
=&\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

2.10.3 Застосування векторного добутку

Якщо тверде тіло закріплено в точці O, а до точки M прикладена сила $\mathbf{F}$, то виникає обертальний момент $\mathbf{m}$, який знаходять за допомогою векторного добутку: $\mathbf{m}=\mathbf{OM}\times\mathbf{F}$ (рис. 2.30, а)).

Лінійна швидкість $\mathbf{v}$ точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω, дорівнює $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$, де $\mathbf{r}=\mathbf{OM}$, а O — деяка нерухома точка осі, навколо якої тіло обертається (рис. 2.30, б)).

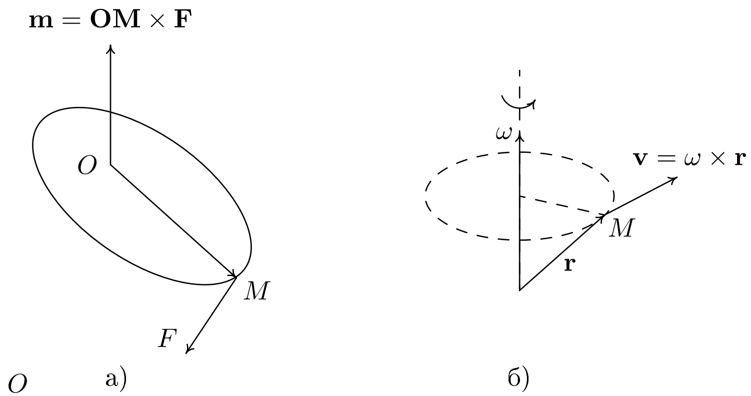

Рис. 2.30: а) обертальний момент, б) лінійна швидкість

Сила $\mathbf{F}$, з якою стале магнітне поле діє на електрон, дорівнює

$$\mathbf{F}=\frac{e}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H},$$

де e — заряд електрона, $\mathbf{v}$ — його швидкість, $\mathbf{H}$ — напруженість магнітного поля, c — електродинамічна стала.

Вправа 2.23. *Для яких умов рівняння* $\mathbf{a_2} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{x}$ *має розв'язок відносно* $\mathbf{x}$*? Скільки існує розв'язків?*

Вправа 2.24. *Довести, що векторний добуток вектора* $\mathbf{a}$ *на перпендикулярний до нього орт* $\mathbf{n}$ *рівносильний повороту вектора* $\mathbf{a}$ *на прямий кут за годинниковою стрілкою в площині , перпендикулярній орту* $\mathbf{n}$.

Вправа 2.25. *Перевірити, що векторне множення даного вектора* $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ *може бути замінено трьома операціями:*

1) проектуванням вектора $\mathbf{a}$ *на площину, перпендикулярну до* $\mathbf{b}$*;*

2) поворотом отриманого під час проектування вектора на прямий кут за годинниковою стрілкою в указаній площині;

3) множенням повернутого вектора на модуль множника $\mathbf{b}$.

2.11 Мішаний добуток векторів

2.11.1 Означення й властивості

Мішаним добутком $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку двох векторів на третій:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Мішаний добуток також позначається $\mathbf{abc}$.

Використовуючи означення скалярного й векторного добутків векторів, мішаний добуток можна подати у вигляді

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\theta = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi \cdot |\mathbf{c}| \cos\theta = Sh, \tag{2.6}$$

де $\varphi = \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$, $\theta = \widehat{\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}}$, $S = |a||b| \sin\varphi$ — площа основи паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$, $h = AE = |c| \cos\theta$ — його висота (рис. 2.31).

Таким чином, модуль мішаного добутку векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, або подвоєному об'єму трикутної призми ($ABDA'B'D'$ на рис. 2.31), або шестикратному об'єму піраміди ($A'ABD$ на рис. 2.31), побудованих на векторах як на ребрах:

$$V_{\text{пар}} = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|,$$
$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{2} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|,$$
$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

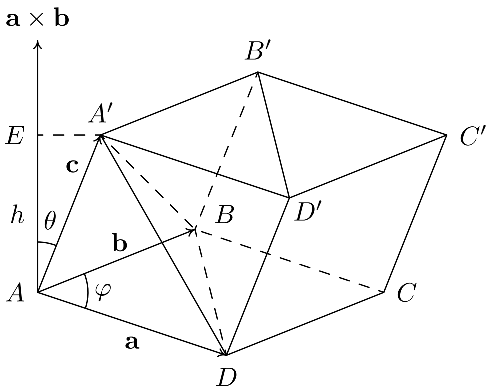

Рис. 2.31: Мішаний добуток

Пояснити треба тільки останню рівність, яка випливає з формул об'ємів призми й піраміди:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{ABD} h = \frac{1}{3} V_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Знак мішаного добутку пов'язаний з тим, якою є трійка векторів **a**, **b**, **c** — правою чи лівою:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V_{\text{пар}}, & <\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> \text{ — права трійка векторів}, \\ -V_{\text{пар}}, & <\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}> \text{ — ліва трійка векторів}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Дійсно, знак мішаного добутку залежить лише від знаку $\cos\theta$ і тому мішаний добуток додатний, коли вектор **c** має напрям від площини векторів **a** і **b** такий самий, що й вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, тобто, коли трійка векторів **a**, **b**, **c** є правою. Аналогічно доводиться, що мішаний добуток лівої трійки векторів — від'ємний.

ВЛАСТИВОСТІ МІШАНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

1°. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \iff \mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ — *компланарні.*

Необхідність. Нехай $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. З формули (2.6) випливає, що тоді

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\theta = 0.$$

Це можливо в трьох випадках:

$$\begin{aligned}&1)\ |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=0\Longrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Longrightarrow\mathbf{a}\parallel\mathbf{b},\\&2)\ |\mathbf{c}|=0\Longrightarrow\mathbf{c}=0,\\&3)\ \cos\theta=0\Longrightarrow\mathbf{c}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

З усіх випадків випливає, що вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарні.

Достатність. Нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарні. Тоді, якщо випадки 1) і 2) не мають місця, то має місце випадок 3). Тобто обов'язково $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$.

2°. $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\lambda\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda\mathbf{c})=\lambda\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$.

Випливає з відповідних властивостей скалярного та векторного добутків.

3°. $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})=(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})=-\,(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})=-\,(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a})=-\,(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b})$.

Якщо вектори компланарні, то властивість можна вважати доведеною. В протилежному випадку на векторах можна побудувати паралелепіпед, модуль об'єму якого не буде залежати від порядку множників в мішаному добутку і дорівнюватиме модулю останнього. Знак мішаного добутку за властивістю (2.7) тоді визначиться лише орієнтацією трійки векторів (права вона чи ліва). Аналізуючи цю орієнтацію, дістаємо доводжувану властивість. Запам'ятати її можна за допомогою рис. 2.32: якщо йти за стрілками, то перед мішаним добутком треба ставити знак «плюс», а навпаки — знак «мінус».

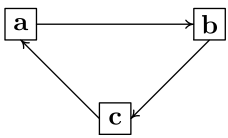

Рис. 2.32: До властивості 3

2.11.2 Мішаний добуток в ортонормованому базисі

В ортонормованому базисі $< \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} >$ мішаний добуток векторів $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ обчислюється за формулою

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

оскільки

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{c} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) =$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Вправа 2.26. *Довести компланарність векторів* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$, *якщо виконується рівність*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Вправа 2.27. *Довести, що для будь-яких* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$ *вектори* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ *і* $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ *компланарні. Який геометричний зміст цього факту?*

Вправа 2.28. *Довести тотожності:*

а) $(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

б) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 3(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

в) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

г) $\forall(\alpha, \beta)\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

2.12 Подвійний векторний добуток

Подвійним векторним добутком трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називається векторний добуток векторного добутку двох векторів на третій: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Подвійний векторний добуток має такі властивості.

ВЛАСТИВОСТІ ПОДВІЙНОГО ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ

1°. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

Ця формула є розкладом подвійного векторного добутку за векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, з якими він компланарний.

2°. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

3°. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

З усіма властивостями погодимось без доведення.

Вправа 2.29. *Чи можна знайти вектор x, що водночас задовольняє двом рівнянням: $\mathbf{x}\mathbf{a}=\alpha$ і $\mathbf{x}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$, де $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — задані вектори і α — заданий скаляр?*

Вправа 2.30. *Початки трьох некомпланарних векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ суміщені. Довести, що площина, що проходить через кінці цих векторів, перпендикулярна вектору $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.*

Вправа 2.31. *Довести тотожності:*

а) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$.

б) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b}\mathbf{d}-(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\mathbf{b}\mathbf{c}$.

в) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{e})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) & (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{e})\\ (\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}) & (\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{e})\end{vmatrix}$.

3 Елементи аналітичної геометрії

3.1 Базові поняття

Аналітична геометрія вивчає геометричні об'єкти в системі координат, в якій ці об'єкти можна ототожнити з множинами точок, що задовольняють рівнянням (чи системам рівнянь), або нерівностям (чи системам нерівностей). Більш того, геометричним об'єктом вважають саме рівняння, або нерівність. Це в певному сенсі зручно й ефективно, хоча в деяких випадках призводить до того, що геометричний об'єкт може взагалі не існувати (бо йому відповідає порожня множина точок), або вироджуватись, наприклад, крива може стати парою точок, але все одно вважатись «кривою».

Таким чином, перш за все на площині вводиться двовимірна декартова система координат (x, y), а в просторі — тривимірна (x, y, z).

Лінією на площині називається множина точок, координати яких (x, y) задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$.

Приклад 3.1. *Коло радіусу R з центром в точці (a, b) задається рівнянням*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{3.1}$$

Розв'язання. Дійсно, коло має таку властивість, що будь-яка його точка $M(x, y)$ знаходиться на відстані R від центра кола $A(a, b)$. Тоді $|\mathbf{MA}| = R$, або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$, звідки після піднесення до квадрату й виходить рівняння (3.1). □

Приклад 3.2. *Яка лінія відповідає рівнянню $\left(x^2-1\right)^2 + y^2 = 0$?*

Розв'язання. Очевидно, ліва частина рівняння стає нулем тоді й тільки тоді, коли $x^2 - 1 = 0$ і $y = 0$. Тому «лінією» в даному випадку треба вважати пару точок $M_1(-1; 0)$, $M_2(1; 0)$. □

Приклад 3.3. *Яка лінія відповідає рівнянню* $(x-1)^2 y^2 = 0$?

Розв'язання. Всі точки з абсцисою $x = 1$ і всі точки з ординатами $y = 0$ будуть задовольняти рівняння. Тому «лінією» є пара прямих: $x = 1$ та $y = 0$. □

Приклад 3.4. *Яка лінія відповідає рівнянню* $x^2 + y^2 = -1$?

Розв'язання. Сума квадратів будь-яких величин не може бути від'ємною і тому «лінією» є порожня множина точок. Така лінія називається ***уявним колом***. □

Поверхнею називається множина точок, координати яких (x, y, z) задовольняють рівняння $F(x, y, z) = 0$.

Лінією в просторі є переріз двох поверхонь, тобто множина точок, координати яких (x, y, z) задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Фігурою на площині називається множина точок, координати яких (x, y) задовольняють системі нерівностей

$$\begin{cases} F_1(x, y) \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x, y) \leq 0. \end{cases}$$

Приклад 3.5. *Побудувати на площині фігуру, що задана системою нерівностей* $x^2 - y \leq 0$, $y + x^2 - 1 \leq 0$.

Розв'язання. Першу нерівність системи можна подати у вигляді $y \geq x^2$. Це означає, що точки фігури мають ординати більші, ніж ординати параболи $y = x^2$, тобто точки фігури розташовані вище графіка цієї параболи. Другу нерівність запишемо у вигляді $y \leq 1 - x^2$. Виходить, що точки фігури розташовані нижче графіка параболи $y = 1 - x^2$. Таким чином, фігурою є область, обмежена двома параболами (див. рис. 3.1). □

Тілом називається множина точок, координати яких (x, y, z) задовольняють системі нерівностей

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x, y, z) \leq 0. \end{cases}$$

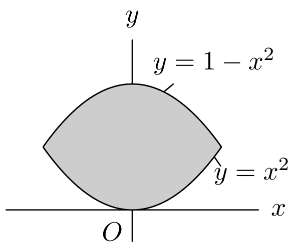

Рис. 3.1: До прикладу 3.5

3.2 Алгебраїчні криві й поверхні

Дослідження довільних множин точок, що задовольняють рівняння, або їх системи, є неосяжною задачею. Тому з цієї множини вилучають підмножину точок, які утворюють так звані алгебраїчні криві або алгебраїчні поверхні.

Алгебраїчною кривою (лінією) на площині називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння

$$A_1 x^k y^l + \cdots + A_m x^p y^q = 0,$$

причому, показники — невід'ємні цілі числа, $n = \max(k + l, \ldots, p + q)$ називається ***степенем рівняння***, а також ***порядком лінії***. Наприклад, рівняння кола (3.1) є рівнянням другого степеня, а саме коло — алгебраїчною кривою другого порядку.

Алгебраїчною поверхнею називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння

$$A_1 x^k y^l z^s + \cdots + A_m x^p y^q z^r = 0,$$

причому, всі показники — невід'ємні цілі числа,

$$n = \max(k + l + s, \ldots, p + q + r)$$

називається ***степенем рівняння***, а також ***порядком поверхні***.

3.3 Алгебраїчні лінії першого порядку

3.3.1 Векторне рівняння прямої

Нехай пряма з напрямним вектором $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, проходить через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$, радіус-вектори яких позначимо $\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{r}$, відповідно. Оскільки вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{M_0M}$ колінеарні, бо розташовані на одній і тій самій прямій, то $\exists (t)\ \mathbf{M_0M} = t\mathbf{a}$. З рис. 3.2 бачимо, що $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{M_0M}$ і тому

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}.$$

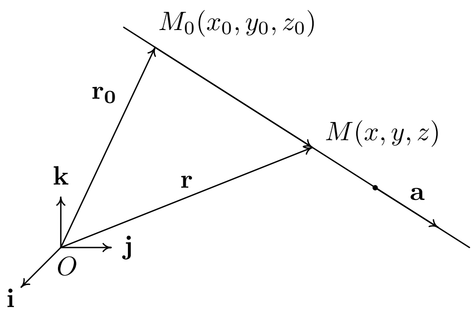

Рис. 3.2: До векторного рівняння прямої

Це рівняння називають ***векторним рівнянням прямої***. Переходячи до координатного запису, дістаємо з нього систему скалярних рівнянь

$$\text{для простору} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x - x_0 = a_1 t, \\ y - y_0 = a_2 t, \end{array}\right\} \text{для площини} \\ z - z_0 = a_3 t. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Перші два рівняння називаються ***параметричними рівняннями прямої*** на площині, а всі три рівняння називаються ***параметричними рівняннями прямої в просторі***. Змінна t називається параметром.

3.3.2 Рівняння прямої на площині

Нехай $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ — напрямний вектор прямої на площині. Оскільки $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$. Якщо $a_1 = 0$, то з першого рівняння (3.2) випливає, що $x = x_0$. Це — рівняння вертикальної прямої, що проходить через точку $(x_0, 0)$ (рис. 3.3, а)). Якщо ж $a_2 = 0$, то з другого рівняння (3.2) виходить, що $y = y_0$. Це — рівняння горизонтальної прямої, що проходить через точку $(0, y_0)$ (рис. 3.3, а)).

Нехай тепер $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$. З першого та другого рівнянь можна знайти параметр t і отримані вирази зрівняти один з одним:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{3.3}$$

Таке рівняння називається ***рівнянням прямої, що проходить через точку*** $M_0\,(x_0, y_0)$ ***і має напрямний вектор*** **a** (рис. 3.3, б)).

Нехай кінцем вектора **a** є точка $M_1\,(x_1, y_1)$. Тоді $\mathbf{a} = \mathbf{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ і рівняння прямої (3.3) стає таким:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Воно називається ***рівнянням прямої***, що проходить через дві точки (рис. 3.3, б)).

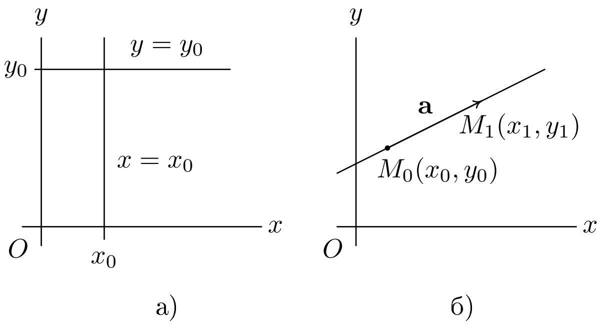

Рис. 3.3: Рівняння прямої, що проходить через задані точки

Його можна переписати як

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)\,,$$

або

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)\,, \tag{3.4}$$

де $k = (y_1 - y_0) \,/\, (x_1 - x_0) = \operatorname{tg}\varphi$, а φ — кут нахилу прямої до осі Ox (рис. 3.4). Рівняння (3.4) називається ***рівнянням прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт***. Це рівняння можна перетворити на $y = kx + y_0 - kx_0$ і, позначивши $b = y_0 - kx_0$, дістати рівняння

$$y = kx + b,$$

що називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом***. Величина b є «засічкою», що залишає пряма на осі Oy, коли її перетинає (рис. 3.5).

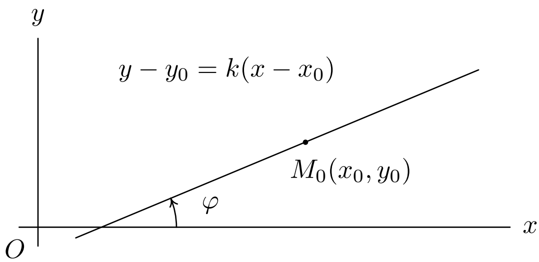

Рис. 3.4: $k = \operatorname{tg}\varphi$

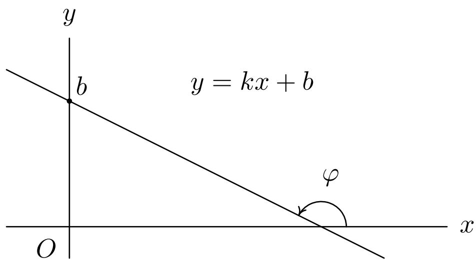

Рис. 3.5: Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

З формули (3.3) дістаємо рівність $a_2\,(x - x_0) - a_1\,(y - y_0) = 0$, або $a_2 x - a_1 y + a_1 y_0 - a_2 x_0 = 0$. В позначеннях $A = a_2$, $B = -a_1$, $C = a_1 y_0 - a_2 x_0$ виходить рівняння

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.5}$$

$A^2 + B^2 \neq 0$, яке називається ***загальним рівнянням прямої***. Воно показує, що пряма на площині є алгебраїчною лінією першого порядку.

Теорема 3.1. *Рівняння (3.5) задає пряму на площині. Будь-яка пряма може бути задана таким рівнянням.*

Висновок 3.1. *Вектор $\mathbf{n} = (A, B)$, який називається **нормаллю** до прямої, є перпендикулярним до неї (рис. 3.6).*

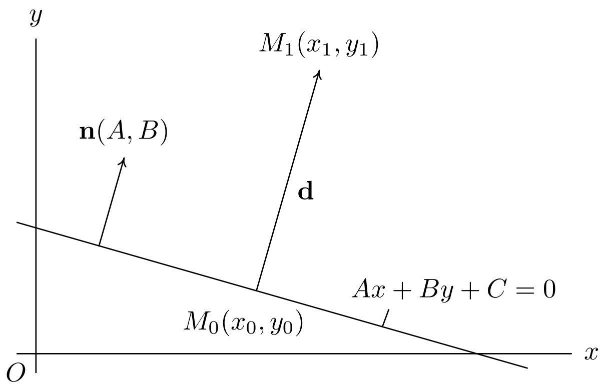

Рис. 3.6: Загальне рівняння прямої, відстань від точки

Доведення. Нехай точка $M(x_0, y_0)$ розташована на прямій (3.5), тоді її координати задовольняють цьому рівнянню:

$$Ax_0 + Bx_0 + C = 0.$$

Віднімемо це рівняння від рівняння (3.5) і дістанемо рівність $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, ліву частину якої перепишемо у вигляді скалярного добутку векторів:

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0. \tag{3.6}$$

Оскільки точка $M(x, y)$ розташована на прямій (3.5), то вектор $(x - x_0, y - y_0)$ можна вважати її напрямним вектором (на прямій розташовано безліч точок, тому з них можна завжди взяти таку, для якої $x \neq x_0$). Тоді рівняння (3.6) означає перпендикулярність прямої і вектора нормалі. □

3.3. Алгебраїчні лінії першого порядку

Нехай в рівнянні (3.5) вільний член $\neq 0$. Перенесемо його в праву частину рівняння і поділимо обидві частини рівняння на $-C$:

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Позначимо $a = -C/A$, $b = -C/B$ і надамо останньому рівнянню вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Це рівняння називається ***рівнянням прямої в відрізках на осях***. Величини a та b є «засічками», що залишає пряма на осях координат, коли перетинає їх (рис. 3.7). Наприклад, якщо $y = 0$, то $x = a$, тобто пряма перетинає вісь Ox в точці $(a; 0)$.

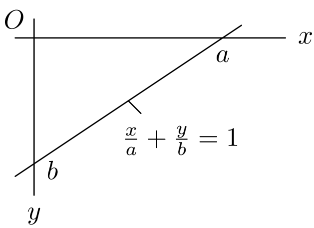

Рис. 3.7: Рівняння прямої в відрізках на осях

3.3.3 Кут між двома прямими на площині

Візьмемо дві прямі l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2x + b_2$ і розглянемо задачу, як знайти кут φ між ними (рис. 3.8). Цей кут відраховується від прямої l_1 до прямої l_2 в тому напрямі, в якому виконується найкоротший поворот від осі Ox до осі Oy. Нехай α_1 — кут між прямою l_1 і віссю Ox, а α_2 — такий самий кут для прямої l_2. З рис. 3.8 бачимо, що для трикутника MNP кут α_2 є зовнішнім і тому дорівнює сумі двох внутрішніх кутів α_1 і φ: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$. Таким чином, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ і

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Але $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ і тому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.7}$$

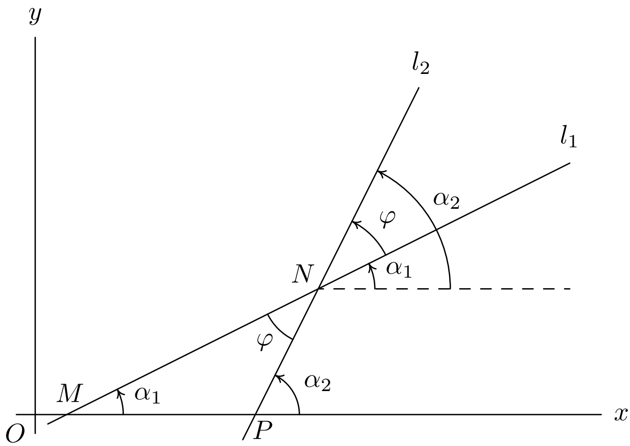

Рис. 3.8: Кут між прямими

З отриманої формули видно, що умовою паралельності прямих є рівність

$$k_1 = k_2,$$

бо тоді кут φ дорівнює 0.

Якщо кут $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ і за формулою зведення

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1},$$

тобто

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{3.8}$$

Це є умовою перпендикулярності двох прямих.

Кут між двома прямими, їх паралельність і перпендикулярність можуть бути визначені також за допомогою напрямних векторів прямих, або їх нормалей.

3.3.4 Відстань від точки до прямої

Відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму.

Нехай пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ і треба знайти відстань до неї від точки $M_1\,(x_1, y_1)$. Позначимо $\mathbf{n} = (A, B)$ — вектор нормалі прямої, $\mathbf{d} = \mathbf{M_0M_1}$, де $M_0\,(x_0, y_0)$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму (див. рис. 3.6). Обчислимо скалярний добуток векторів $\mathbf{n}$ і $\mathbf{d}$, враховуючи, що вони колінеарні і тому кут між ними дорівнює або нулю, або π. З одного боку

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{n}|\,|\mathbf{d}| \cos \widehat{\mathbf{n}, \mathbf{d}} = \pm\,|\mathbf{n}|\,|\mathbf{d}|\,. \tag{3.9}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} &= (A, B) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = A\,(x_1 - x_0) + B\,(y_1 - y_0) = \\ &= Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0) = Ax_1 + By_1 + C, \end{aligned} \tag{3.10}$$

оскільки точка M_0 міститься на прямій і тому її координати задовольняють рівняння $Ax_0 + By_0 + C = 0$. З формул (3.9) і (3.10) отримуємо рівність $\pm\,|\mathbf{n}|\,|\mathbf{d}| = Ax_1 + By_1 + C$, а далі, з урахуванням того, що $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, дістаємо

$$|\mathbf{d}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ця формула називається ***формулою відстані від точки до прямої***.

Вправа 3.1. *Трикутник має вершину $C\,(5; 2)$, рівняння двох його сторін є $5x - 2y - 3 = 0$ і $2x + y - 12 = 0$, а одна з його висот має рівняння $4x + y - 18 = 0$. Знайти кут між середньою лінією, що сполучає сторони AC і BC і стороною AC.*

Вправа 3.2. *Довести, що умову, за якою три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і $M_3(x_3, y_3)$ належать одній прямій, можна записати в такому вигляді:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вправа 3.3. *Довести, що формулу для визначення кута між прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ можна записати у вигляді:*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 - B_1B_2}.$$

3.3. Алгебраїчні лінії першого порядку

3.4 Площина

3.4.1 Рівняння площини

Візьмемо на площині p два неколінеарні вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$, початки яких суміщені в точці $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, та ще одну точку $M\,(x, y, z)$ (рис. 3.9). Проведемо в точку M_0 радіус-вектор $\mathbf{r}_0$, а в точку M — радіус-вектор $\mathbf{r}$.

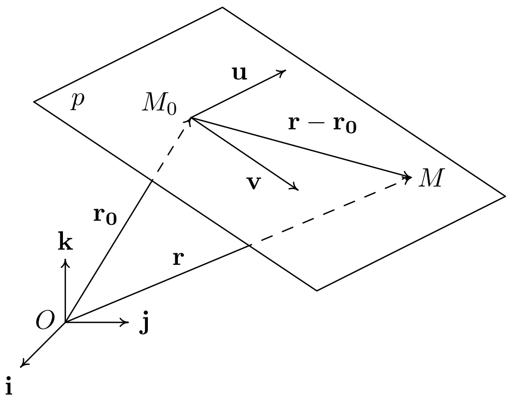

Рис. 3.9: Векторне рівняння площини

Тоді за теоремою розкладання для площини вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{M}$ можна розкласти за векторами $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ єдиним способом, тобто знайдуться числа t і τ, для яких буде справедлива рівність

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}.$$

Це рівняння називають ***векторним параметричним рівнянням площини***, а величини t і τ — параметрами.

Очевидно, що вектори $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ і $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ компланарні, тобто їх мішаний добуток є нулем:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \tag{3.11}$$

Це рівняння називають ***векторним рівнянням площини***.

Нехай вектор $\mathbf{u}$ закінчується в точці $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, а вектор $\mathbf{v}$ — в точці $M_2\,(x_1, y_2, z_2)$. Тоді $\mathbf{u} = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{M}_0\mathbf{M}_2 = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Крім того, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Це означає, що векторне рівняння площини (3.11) можна переписати у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.12}$$

Останнє рівняння називається ***рівнянням площини, що проходить через три точки*** (M_0, M_1 і M_2).

Якщо розкрити визначник за елементами першого рядка, вийде рівняння

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ z_2 - z_0 & x_2 - x_0 \end{vmatrix} (y - y_0) + \\ + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0.$$

Позначивши визначники в тій послідовності, в якій вони зустрічаються в рівнянні, через A, B, C, дістанемо рівняння площини у вигляді

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Це рівняння можна назвати ***рівнянням площини, що проходить через точку*** M_0.

Розкриття дужок дає $Ax+By+Cz+(-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$. Додавши позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, прийдемо до рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.13}$$

яке називається ***загальним рівнянням площини***. З нього випливає, що площина є поверхнею першого порядку.

Для випадку $A \neq 0$, $B = C = 0$, маємо рівняння $Ax + D = 0$, або $x = -D/A$. Це означає, що для такої площини координата x є сталою, а координати y і z можуть набирати будь-яких значень незалежно одна від одної, тобто площина виходить паралельною площині yOz і проходить через точку $(-D/A; 0; 0)$ (рис. 3.10, а)). Аналогічно для випадків $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ і $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ будемо мати площини, паралельні координатним площинам xOz та xOy, відповідно.

Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, загальне рівняння площини стає таким: $Ax + By + D = 0$. Виходить, що координата z може бути будь-якою, а координати x і y пов'язані рівнянням прямої на площині xOy. Така площина паралельна осі Oz, а її перерізом з площиною xOy є пряма з рівнянням $Ax + By + D = 0$ на цій площині (рис. 3.10, б)). Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ та $By + Cz + D = 0$ є рівняннями площин, паралельних, відповідно, координатним осям Oy та Ox.

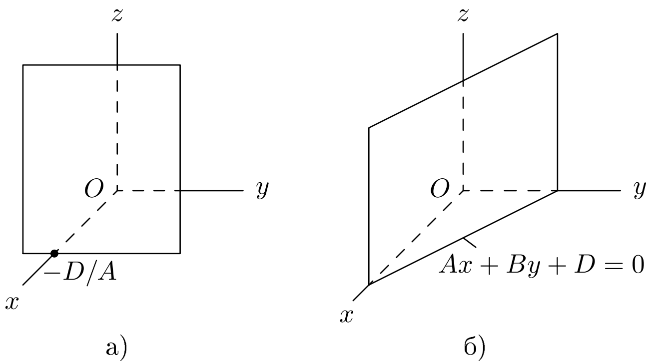

Рис. 3.10: Особливі положення площин

Якщо ж $A = B = C = 0$, то все залежить від вільного члена D. Для $D \neq 0$ загальне рівніння площини стає неможливим і «площина» є уявним геометричним об'єктом. Для $D = 0$ маємо тотожність $0 = 0$, яку задовольняють координати будь-якої точки простору. Тобто і в цьому випадку «площина» перестає бути такою з точки зору елементарної математики і перетворюється в тривимірний простір.

Теорема 3.2. *Нехай $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Тоді рівняння (3.13) задає площину. Будь-яка площина може бути задана таким рівнянням.*

Висновок 3.2. *Вектор $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq 0$ називається* ***нормаллю*** *до площини і є перпендикулярним до неї.*

Доведення. Аналогічно рівнянню (3.6) для прямої можна отримати рівняння

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

для площини, з якого виходить, що $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Оскільки вектори (якщо зважити на довільність точки M) $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ містяться в площині, то остання рівність означає перпендикулярність вектора $\mathbf{n}$ і площини. □

Нехай в рівнянні (3.13) вільний член $D \neq 0$. Перенесемо його в праву частину рівняння і поділимо обидві частини рівняння на $-D$:

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Позначимо $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ і надамо останньому рівнянню вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Це рівняння називається ***рівнянням площини в відрізках на осях***. Величини a, b, c є «засічками», що залишає площина на осях координат, коли їх перетинає. Наприклад, якщо $y = 0$, $z = 0$, то $x = a$, тобто площина перетинає вісь Ox в точці $(a; 0; 0)$ (рис 3.11).

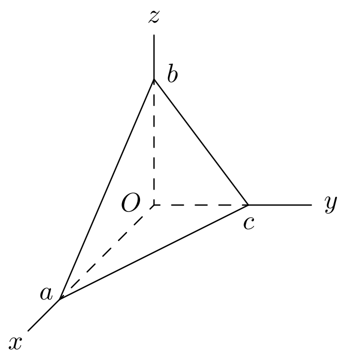

Рис. 3.11: Рівняння площини в відрізках на осях

3.4.2 Відстань від точки до площини і взаємне розташування двох площин

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Відстань від точки $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ до площини, що задана загальним рівнянням (3.13), обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Нехай дві площини p_1 і p_2 задані рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Одним з кутів $\widehat{p_1, p_2}$ між ними вважають кут між їхніми нормалями:

$$\cos\widehat{p_1, p_2} = \cos\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Інший кут доповнює кут $\widehat{p_1, p_2}$ до π: $\psi = \pi - \widehat{p_1, p_2}$. Неважко зрозуміти, що, виходячи з колінеарності й ортогональності векторів нормалей, можна визначити паралельність і перпендикулярність площин:

$$p_1 \parallel p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

$$p_1 \perp p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Вправа 3.4. *Довести, що рівняння площини, яка проходить через точки* (x_1, y_1, z_1) *і* (x_2, y_2, z_2) *перпендикулярно площині*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Вправа 3.5. *Якщо площина проходить через три точки* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) *і* (x_3, y_3, z_3), *то її рівняння можна записати у вигляді:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вправа 3.6. *Обчислити відстань між площинами, що задані рівняннями:* $11x - 2y - 10z + 15 = 0$, $11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

3.5 Пряма в просторі

3.5.1 Системи рівнянь прямої

У просторі напрямний вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)\,, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, прямої l має три компоненти. Якщо $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, то систему (3.2), виключаючи з її рівнянь параметр t, можна перетворити на таку:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z = \dfrac{a_3}{a_2}\,(y - y_0) + z_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Це означає, що пряма l є перерізом двох площин, саме розташована в площині $x = x_0$ і проектується в пряму l' з рівнянням (3.14) на площині yOz (таким чином, пряма паралельна цій площині). Цей випадок ілюструє рис. 3.12. Аналогічно, для випадку $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ має мо пряму, паралельну площині xOz, а для випадку $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ дістаємо пряму, паралельну площині xOy.

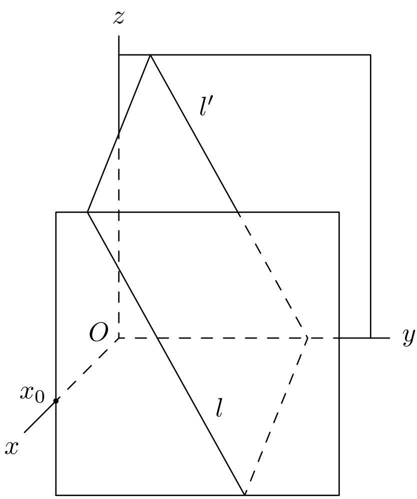

Рис. 3.12: Паралельність прямої площині yOz

Якщо дві компоненти напрямного вектора прямої дорівнюють нулю, наприклад, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, то система (3.2) набирає вигляду

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Третє рівняння можна відкинути, бо воно означає тільки те, що координата z може бути будь-якою. Таким чином, пряма l є перерізом двох площин $x = x_0$ і $y = y_0$, обидві з яких паралельні осі Oz, тому й пряма паралельна цій осі (рис. 3.13). Аналогічно, якщо $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, пряма паралельна

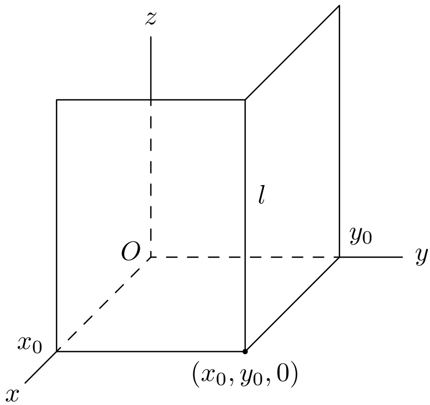

Рис. 3.13: Паралельність прямої й осі Oz

осі Oy, а, коли $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, пряма паралельна осі Ox.

Нехай тепер $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$. Якщо в кожному з трьох рівнянь системи (3.2) виразити параметр t через інші величини і зрівняти отримані вирази один з одним, вийде симетричний запис вигляду

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \tag{3.15}$$

який називається ***системою рівнянь прямої у просторі, що проходить через точку M_0 і має напрямний вектор*** $\mathbf{a}$. Попередні випадки можна дістати і з цієї системи, якщо домовитись, що, коли знаменник дробу дорівнює нулю, то й відповідний чисельник теж дорівнює нулю.

Нехай напрямний вектор має вигляд $\mathbf{a} = \mathbf{M_0M_1}$, де $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ — точка, розташована на прямій. Тоді систему рівнянь (3.15) можна записати так:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Тепер вона називається ***системою рівнянь прямої, що проходить через дві точки*** (M_0 і M_1).

Якщо задані дві прямі l_1 і l_2 з напрямними векторами, відповідно, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то один з кутів між прямими визначається кутом між їхніми напрямними векторами:

$$\cos \widehat{l_1, l_2} = \cos \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Другий кут дорівнює $\alpha = \pi - \widehat{l_1, l_2}$. Паралельність і перпендикулярність прямих теж визначається розташуванням напрямних векторів:

$$l_1 \parallel l_2 \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

$$l_1 \perp l_2 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

3.5.2 Взаємне розташування прямої і площини

Кутом φ між прямою l і площиною p називається гострий кут між прямою і її проекцією на площину (рис. 3.14). Нехай пряма має напрямний вектор

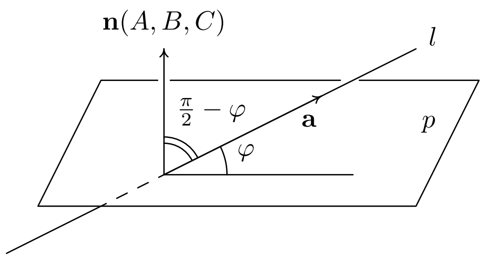

Рис. 3.14: Кут між прямою і площиною

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, а площина має нормаль $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Синус кута між прямою і площиною можна обчислити за формулою

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{n}|}.$$

Паралельність прямої і площини означає перпендикулярність векторів **a** і **n**, а перпендикулярність прямої і площині — колінеарність **a** і **n**:

$$l \parallel p \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{n} \Longleftrightarrow a_1A + a_2B + a_3C = 0,$$

$$l \perp p \Longleftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{n} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}.$$

Вправа 3.7. *Довести, що рівняння площини, яка проходить через перетинні прямі*

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вправа 3.8. *Довести, що рівняння прямої, яка проходить через точку* (x_0, y_0, z_0) *паралельно площинам* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *і* $A_2x + B_2y + {}$ ${}+C_2z + D_2 = 0$ *можна записати у вигляді*

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Вправа 3.9. *Довести, що необхідна і достатня умова розташування двох прямих*

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

в одній площині, є виконання рівності

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вправа 3.10. *Довести, що відстань від точки* A *до прямої, що проходить через точку* B *і має напрямний вектор* $\mathbf{s}$, *визначається формулою* $d = |\mathbf{s} \times \mathbf{AB}|/|\mathbf{s}|$.

3.5. Пряма в просторі

Вправа 3.11. *Нехай перехресні прямі проходять відповідно через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Напрямні вектори прямих $\mathbf{s}_1$ і $\mathbf{s_2}$ відомі. Довести, що відстань між прямими визначається формулою $d = (\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{AB})/|\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}|$.*

Вправа 3.12. *Знайти співвідношення, яким повинні задовольняти коефіцієнти рівнянь прямої*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

щоб ця пряма була 1) паралельна осі Oy, 2) перетинала вісь аплікат; 3) збігалась з віссю Ox.

3.6 Алгебраїчні криві другого порядку

У відповідності з означенням крива другого порядку є множиною точок $M\,(x, y)$, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Основними такими кривими є еліпс, гіпербола та парабола.

3.6.1 Еліпс

Еліпсом називається лінія, для якої сума відстаней від будь-якої її точки до двох заданих точок, що називаються ***фокусами***, є величина стала, більша, ніж відстань між фокусами.

Введемо систему координат, в якій фокуси будуть мати координати $F_1\,(-c; 0)$, $F_2\,(c; 0)$, $c > 0$, довільну точку еліпса позначимо $M\,(x, y)$ і введемо два вектори $\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1\mathbf{M} = (x + c, y)$ і $\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2\mathbf{M} = (x - c, y)$, які називають ***фокальними радіусами*** еліпса. Тоді сума відстаней від точки M до фокусів дорівнюватиме $|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| = 2a$, де $a > 0$ — константа, а відстань між фокусами є $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. За означенням еліпса $|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| = 2a > |\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$

і тому $a > c$. Перетворимо рівність $|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| = 2a$ в координатній формі:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a, \tag{3.16}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2xc+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc,\ a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right). \tag{3.17}$$

З позначенням $b^2 = a^2 - c^2$ рівняння (3.17) можна записати як $b^2x^2 + {} +a^2y^2 = a^2b^2$, або, поділивши на a^2b^2, як

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.18}$$

Останнє рівняння називають ***канонічним рівнянням*** еліпса, бо воно в деякому розумінні є найпростішим з його можливих рівнянь. Можна показати, що рівняння (3.16) і (3.18) еквівалентні. Величини $a, b > 0$ називають ***параметрами еліпса***.

Дослідимо форму еліпса, виходячи з його канонічного рівняння. Перш за все, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то й точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ теж йому належать. Це означає симетрію еліпса відносно осей координат і його центральну симетричність відносно початку координат. Крім того, з канонічного рівняння дістаємо, що, коли $x = \pm a$, то $y = 0$, а коли $y = \pm b$, то $x = 0$. Таким чином, еліпс перетинає вісь Ox в точках $A_1\,(-a; 0)$ і $A_2\,(a; 0)$, а вісь Oy — в точках $B_1\,(0; -b)$ і $B_2\,(0; b)$. Розв'яжемо канонічне рівняння еліпса відносно y. Матимемо

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Бачимо, що еліпс існує тільки для таких x, для яких $|x| \le a$. Якщо $|x|$ збільшується від 0 до a, то $|y|$ зменшується від b до 0. Перелічені властивості еліпса дають основу для його побудови (рис. 3.15).

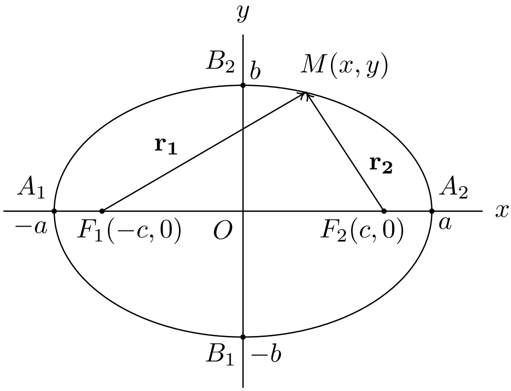

Рис. 3.15: Еліпс

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають ***вершинами*** еліпса, відрізок A_1A_2 — ***великою віссю***, відрізок B_1B_2 — ***малою віссю***, відрізок OA_2 — ***великою піввіссю***, а відрізок OB_2 — ***малою піввіссю***. Точку O називають ***центром*** еліпса.

Якщо в рівнянні (3.18) $a < b$, то фокуси еліпса знаходяться на осі Oy, і він витягнутий вздовж цієї осі(рис. 3.16, а)).

Для $a = b = R$ еліпс перетворюється на коло $x^2 + y^2 = R^2$, а його фокуси — на центр кола.

Канонічним рівнянням еліпса інколи вважають також рівняння

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

яке є рівнянням еліпса, зображеного на рис. 3.15 або 3.16, а), паралельним переносом переміщеного на вектор $\mathbf{d} = (x_0, y_0)$ (рис. 3.16, б)); його центром є точка $O'(x_0, y_0)$.

Ексцентриситетом e еліпса називають відношення відстані між його фокусами до довжини його великої осі:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c < a$, то $0 \le e < 1$. Відношення півосей еліпса можна виразити

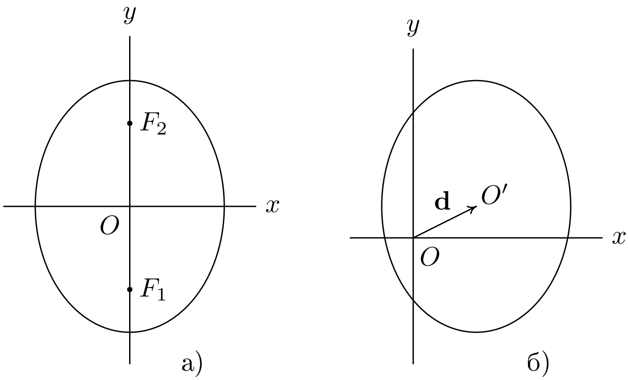

Рис. 3.16: Канонічні різновиди еліпсів

через ексцентриситет:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Зменшенню e відповідає збільшення відношення b/a, еліпс стає менш витягнутим уздовж координатної осі. Для кола маємо $a = b$, і тоді ексцентриситет стає найменшим: $e = 0$.

3.6.2 Гіпербола

Гіперболою називається лінія, для якої модуль різниці відстаней від будь-якої її точки до двох заданих точок, що називаються ***фокусами***, є величина стала, менша, ніж відстань між фокусами.

В системі координат, в якій фокуси мають координати $F_1\,(-c; 0)$, $F_2\,(c; 0)$, $c > 0$, довільну точку гіперболи позначимо $M\,(x, y)$ і введемо два вектори $\mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_1\mathbf{M} = (x + c, y)$ і $\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_2\mathbf{M} = (x - c, y)$, які називають ***фокальними радіусами гіперболи***. Тоді модуль різниці відстаней від точки M до фокусів дорівнюватиме $||\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|| = 2a$, де $a > 0$ — константа, а відстань між фокусами є $|\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$. За означенням гіперболи $||\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2|| = 2a < |\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2| = 2c$ і тому $a < c$. Перетворимо рівність

$|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| = \pm 2a$ в координатній формі:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a, \tag{3.19}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2,$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2,\ a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4,$$

$$a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4,$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Позначивши $b^2 = c^2 - a^2$, останнє рівняння можна записати як $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, або, поділивши на a^2b^2, як

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.20}$$

Це рівняння називається ***канонічним рівнянням гіперболи***. Можна показати, що рівняння (3.19) і (3.20) еквівалентні. Величини $a, b > 0$ називають ***параметрами гіперболи***.

Базуючись на канонічному рівняння гіперболи, дослідимо форму цієї кривої. Очевидно, що, як і еліпс, гіпербола симетрична відносно координатних осей і центральносиметрична відносно початку координат. З канонічного рівняння виходить, що для $x = \pm a$ координата $y = 0$. Таким чином, гіпербола перетинає вісь Ox в точках $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, які називаються ***вершинами гіперболи***. Виразимо в канонічному рівнянні гіперболи y через x:

$$y = \pm b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}. \tag{3.21}$$

Якщо $|x| < a$, y не існує, зокрема, гіпербола не перетинає вісь Oy. Це означає, що гіпербола є сукупністю двох ліній, які називаються її ***вітками***. Також з формули (3.21) випливає, що y зростає, якщо зростає x і, коли $x \to \infty$, то $y \to \infty$.

Гіпербола має асимптоти. ***Асимптотою*** кривої називається пряма, до якої точка, що прямує по кривій в нескінченність, необмежено наближується, ніде повністю з прямою не збігаючись. Нехай $x \geq 0$, $y \geq 0$ і покажемо, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою гіперболи. Дійсно, різниця ординат такої прямої і гіперболи становить (див. (3.21))

$$\frac{b}{a}x - b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = b\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right)}{\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{b}{\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}}.$$

Остання величина прямує до нуля, якщо $x \to \infty$ і тому гіпербола необмежено наближується до прямої $y = \frac{b}{a}x$, коли $x \to \infty$. Асимптота розташована над гіперболою, бо

$$\frac{b}{a}x > b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 \Longleftrightarrow 0 > -1.$$

Симетричність гіперболи дозволяє зробити висновок, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою гіперболи і для $x \to -\infty$, і що пряма $y = -\frac{b}{a}x$ теж є асимптотою гіперболи.

Сформульовані властивості гіперболи дають підстави для її зображення у вигляді, показаному на рис. 3.17. Прямокутник $C'B'BC$ називається

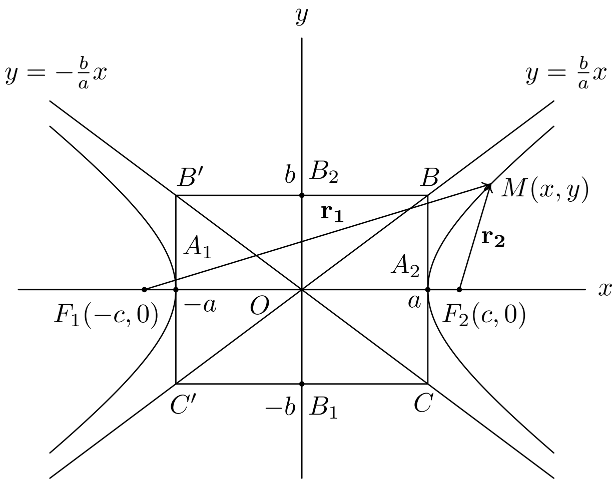

Рис. 3.17: Гіпербола

основним прямокутником гіперболи, відрізок A_1A_2 — ***великою віссю***, відрізок B_1B_2 — ***малою віссю***, відрізок OA_2 — ***великою піввіссю***, а відрізок OB_2 — ***малою піввіссю***. Точку O називають ***центром*** гіперболи.

Якщо в системі координат x і y поміняти місцями, то рівняння гіперболи набере вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Це рівняння теж вважають канонічним, а виглядає гіпербола, як на рис. 3.18, а). Розглядаючи два канонічних випадки, неважко помітити, що гіпербола одну з координатних осей перетинає (ця вісь називається ***дійсною віссю гіперболи***), а другу — ні (ця вісь називається ***уявною віссю гіперболи***).

Вважають канонічними і рівняння гіперболи, переміщеної з положень на рис. 3.17 і 3.18, а) паралельним переносом на вектор $\mathbf{d} = (x_0, y_0)$. Наприклад, для другого випадку рівняння стає таким:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1, \tag{3.22}$$

рис. 3.18, б). Центром гіперболи (3.22) є точка $O'\,(x_0, y_0)$.

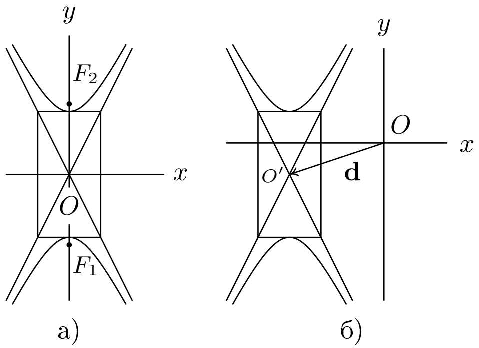

Рис. 3.18: Канонічні різновиди гіпербол

Ексцентриситетом e гіперболи називають відношення відстані між його фокусами до довжини його великої осі:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c > a$, то $e > 1$. Відношення півосей гіперболи можна виразити через ексцентриситет:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{e^2 - 1}.$$

Збільшенню e відповідає збільшення відношення b/a, гіпербола (з рівнянням (3.20)) скоріше відхиляється від осі Ox.

3.6.3 Парабола

Параболою називається лінія, для якої відстань від будь-якої її точки до заданої точки, що називається ***фокусом***, дорівнює відстані до заданої прямої, яка називається ***директрисою***.

Візьмемо систему координат, в якій перпендикуляр, опущений з полюса на директрису міститься на осі Ox, причому його серединою є точка O, розташована зліва від полюса. Якщо довжину цього перпендикуляру позначити p, $p > 0$, то фокус буде мати координати $F\,(p/2; 0)$, а директрисі буде відповідати рівняння $x = -p/2$. Позначимо довільну точку параболи $M\,(x, y)$ і введемо вектор $\mathbf{r} = \mathbf{FM} = (x - p/2, y)$, який називається ***фокальним радіусом параболи***. Відстань від точки M до фокуса є $|\mathbf{r}| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$, а відстань від цієї точки до директриси є $d = x + p/2$. За означенням параболи $|\mathbf{r}| = d$, або

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2, \tag{3.23}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px. \tag{3.24}$$

Останнє рівняння називається ***канонічним рівнянням параболи***, воно еквівалентне рівнянню (3.23) і показує, що парабола є кривою другого порядку. Величина p називається ***параметром параболи***. З канонічного рівняння можна дістати, що парабола не існує для від'ємних значень x і її симетрію відносно осі абсцис. Вісь симетрії параболи називається її ***віссю***, а точка перетину параболи з її віссю симетрії — ***вершиною*** параболи. Також можна побачити, що зі зростанням x значення y зростає за модулем. Зображення параболи показане на рис. 3.19.

Переставлення місцями x і y в системі координат, а також взаємного розташування відносно початку координат директриси і фокуса дають ще

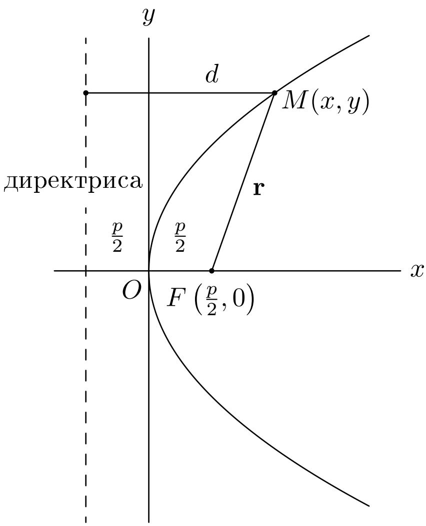

Рис. 3.19: Парабола

три канонічних рівняння параболи, яким відповідають зображення парабол, показані на рис. 3.20, а)-в).

Канонічними вважають також рівняння парабол, зсунутих з їх стандартних положень, що відповідають вищерозглянутим канонічним рівнянням, паралельним переносом на вектор $\mathbf{d} = (x_0, y_0)$. Наприклад, для параболи з рівнянням (3.24) такий зсув дає рівняння

$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0)\,. \tag{3.25}$$

Вершиною параболи (3.25) є точка $O'\,(x_0, y_0)$, рис. 3.20, г).

За ***ексцентриситет параболи*** беруть одиницю: $e = 1$.

3.6.4 Рівняння еліпса, гіперболи й параболи в полярній системі координат

Всі три криві в полярній системі координат мають одне й те саме рівняння

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

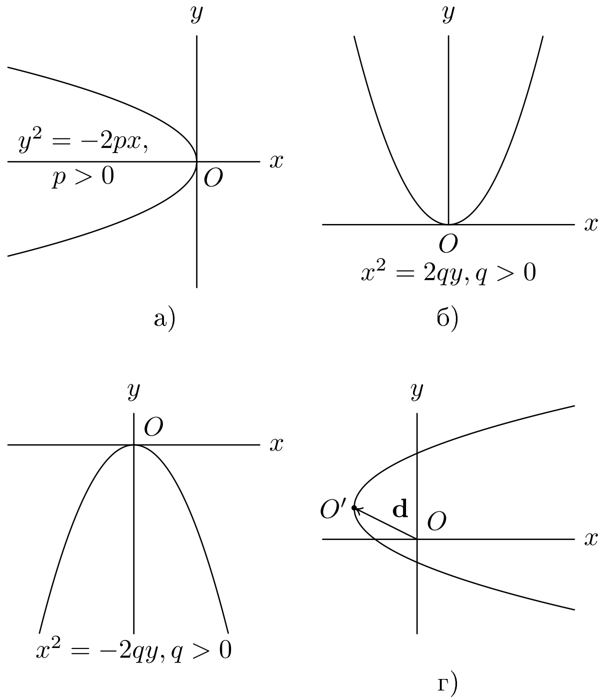

Рис. 3.20: Канонічні різновиди парабол

Можна показати, що це рівняння, якщо

1) $e < 1$, визначає еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

для $\varphi \in [0; 2\pi)$, причому, $p = b^2/a$;

2) $e = 1$, визначає параболу для $\varphi \in [0; 2\pi)$, причому, p є її параметром (див. рівняння 3.24);

3) $e > 1$, визначає одну вітку гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причому, $p = b^2/a$.

3.6. Алгебраїчні криві другого порядку

Вправа 3.13. *В еліпс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вписано трикутник A_1MA_2, одна з сторін якого A_1A_2 збігається з великою віссю. Вершина M рухається по еліпсу. Визначити траєкторію, яку при цьому проходить центр ваги трикутника A_1MA_2.*

Вправа 3.14. *Знайти множину середин фокальних радіус-векторів, проведених з правого фокуса до всіх точок гіперболи*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вправа 3.15. *Прямий кут обертається навколо своєї вершини, що збігається з вершиною параболи. Довести, що при такому русі пряма лінія, що сполучає точки перетину сторін кута з параболою, теж обертається навколо деякої точки, яка розташована на осі параболи.*

3.7 Поверхні

3.7.1 Циліндрична поверхня

Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану криву, що називається ***напрямною***, і весь час залишається паралельною прямій, яка називається ***віссю*** циліндричної поверхні. Пряма, яка цілком належить такій поверхні і паралельна її осі, називається ***твірною*** цієъ поверхні.

Нехай вісь l має напрямний вектор $\mathbf{u} = (p, q, r)$ і точка $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ належить циліндричній поверхні S. З означення циліндричної поверхні тоді випливає, що й вся пряма

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

належить циліндричній поверхні, тобто є її твірною.

Точка $M\,(x, y, z)$ належить циліндричній поверхні S тоді й тільки тоді, коли на напрямній існує точка N така, що M і N належать одній і тій самій твірній. Очевидно, виконується рівність $\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + \mathbf{MN}$ (рис. 3.21). Але $\mathbf{MN} \parallel \mathbf{u}$ і тому знайдеться таке число t, для якого $\mathbf{MN} = t\mathbf{u}$. Тоді $\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + t\mathbf{u} = (x + tp, y + tq, z + tr)$ і виходить, що точка N має координати $N\,(x + tp, y + tq, z + tr)$.

Нехай напрямна циліндричної поверхні задана системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1\,(x, y, z) = 0, \\ F_2\,(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

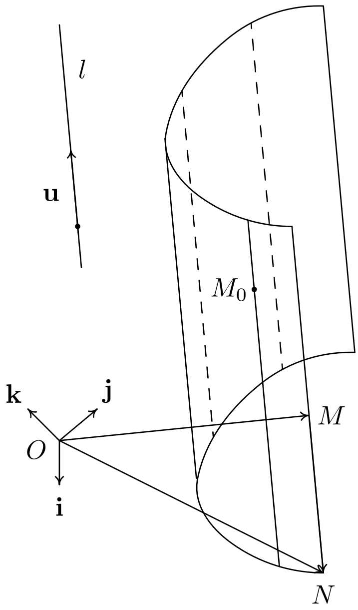

Рис. 3.21: Циліндрична поверхня

Оскільки точка N належить напрямній, її координати задовольняють цю систему:

$$\begin{cases} F_1\left(x+tp, y+tq, z+tr\right)=0, \\ F_2\left(x+tp, y+tq, z+tr\right)=0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Таким чином, точка M належить циліндричній поверхні тоді й тільки тоді, коли її координати задовольняють цю систему рівнянь. Тому, виключаючи з отриманої системи параметр t, можна дістати рівняння $F\left(x,y,z\right)=0$, яке й буде рівнянням циліндричної поверхні.

Якщо напрямна задана рівняннями

$$\begin{cases} \varphi\left(x,y\right)=0, \\ z=0, \end{cases}$$

тобто є кривою, розташованою в площині xOy, в якій вона має рівняння $\varphi\left(x,y\right)=0$, а її віссю є вісь Oz, то $\mathbf{ON}=\mathbf{OM}+t\mathbf{k}=\left(x,y,z+t\right)$, де $\mathbf{k}$ — орт осі Oz, точка N дістає координати $N(x, y, z+t)$, а система (3.26) набирає вигляду

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ z = -t. \end{cases}$$

З нього видно, що координата z може бути будь-якою і тому, виключаючи з системи друге рівняння, дістаємо рівняння циліндричної поверхні у вигляді:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Отриманий результат дає підставу записати таке правило.

Якщо поверхня задана рівнянням з двома змінними, то вона являє собою циліндричну поверхню з напрямною, яка є перерізом поверхні з координатною площиною тих змінних, що входять в рівняння, а її віссю є координатна вісь тієї змінної, якої нема в рівнянні.

3.7.2 Конічна поверхня

Конічною поверхнею (конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану криву, що називається ***напрямною***, і проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, яка називається ***вершиною*** конуса. Пряма, яка цілком належить такій поверхні і проходить через її вершину, називається її ***твірною***.

Нехай точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить конусу, тоді й пряма, що проходить через точки M_0, M_1, теж належить конусу. Тобто така пряма є твірною і її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Точка $M(x, y, z)$ належить конічній поверхні тоді й тільки тоді, коли на напрямній знайдеться точка N, для якої $\mathbf{MN} \parallel \mathbf{M_0M}$ (рис. 3.22). В цьому випадку існує число t таке, що $\mathbf{MN} = t\mathbf{M_0M}$. Оскільки $\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + \mathbf{MN}$, то $\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + t\mathbf{M_0M}$. Тому точка N має координати

$$N(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0)).$$

Нехай конус заданий своєю вершиною $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямною

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

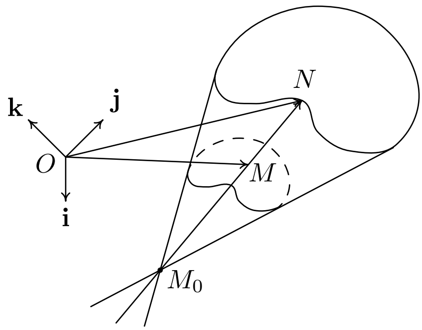

Рис. 3.22: Конічна поверхня

Оскільки точка N належить напрямній, її координати задовольняють цій системі:

$$\begin{cases} F_1\left(x+t\left(x-x_0\right), y+t\left(y-y_0\right), z+t\left(z-z_0\right)\right)=0, \\ F_2\left(x+t\left(x-x_0\right), y+t\left(y-y_0\right), z+t\left(z-z_0\right)\right)=0. \end{cases}$$

Таким чином, точка M належить конічній поверхні тоді й тільки тоді, коли її координати задовольняють цю систему рівнянь. Виключаючи з отриманої системи параметр t, дістанемо рівняння $F\left(x, y, z\right)=0$, яке й буде рівнянням конуса.

Якщо напрямна конуса задана системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi\left(x, y\right)=0, \\ z=h, \end{cases}$$

тобто розташована в площині, паралельній координатній площині xOy, то, підставляючи в неї координати точки N, дістаємо

$$\begin{cases} \varphi\left(x+t\left(x-x_0\right), y+t\left(y-y_0\right)\right)=0, \\ z+t\left(z-z_0\right)=h. \end{cases}$$

З другого рівняння $t=\frac{h-z}{z-z_0}=\frac{(h-z_0)-(z-z_0)}{z-z_0}=\frac{h-z_0}{z-z_0}-1$ і підстановка цього виразу замість t в перше рівняння дає

$$\varphi\left(x_0+\left(h-z_0\right)\frac{x-x_0}{z-z_0}, y_0+\left(h-z_0\right)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.$$

Це рівняння і є рівнянням конічної поверхні. Для $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (вершина конуса є початком координат) останнє рівняння перетворюється на

$$\varphi\left(h\frac{x}{z}, h\frac{y}{z}\right) = 0. \tag{3.27}$$

3.7.3 Поверхня обертання

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням навколо деякої осі, що називається ***віссю обертання***, кривої, яка є перерізом поверхні площиною, що проходить через вісь обертання.

Нехай віссю обертання є вісь аплікат, а кривою L, що обертається навколо цієї осі, є переріз поверхні обертання площиною yOz (рис. 3.23). При-

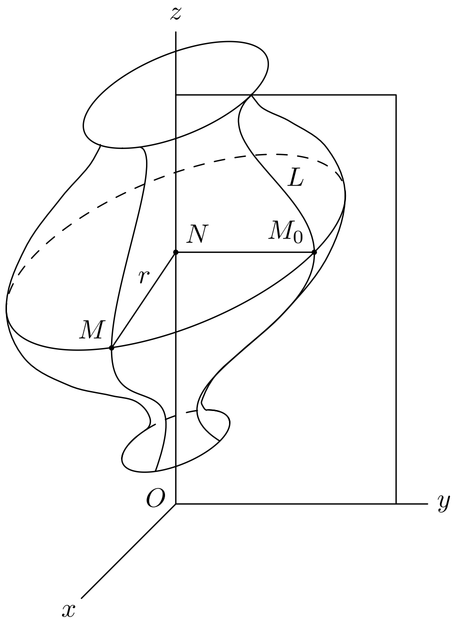

Рис. 3.23: Поверхня обертання

пустимо, що крива описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

і точка $M(x, y, z)$ належить поверхні обертання. Тоді переріз поверхні площиною $z = z_0$ дає коло обертання, на якому міститься точка M, а також точка $M_0(0, y_0, z_0)$, розташована на кривій L. Координати точки M_0 задовольняють рівняння кривої:

$$\varphi(y_0, z_0) = 0. \tag{3.28}$$

Радіусом кола обертання є відстані від точок M_0 та M до осі абсцис: $r = MN = M_0N$. Але $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $M_0N = |y_0|$ і тому $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_0|$. Очевидно також, що $z = z_0$. Підставляючи ці вирази в рівняння (3.28), дістаємо

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Це і є рівнянням поверхні обертання. З вигляду цього рівняння можна зробити такий висновок.

Якщо в рівнянні є сума квадратів двох змінних, то таке рівняння відповідає поверхні обертання, утвореної обертанням кривої навколо осі тієї змінної, яка не ввійшла в згадану суму квадратів. Сама крива розташована в координатній площині змінних, одна з яких не входить в суму квадратів.

3.7.4 Алгебраїчні поверхні другого порядку

У відповідності з означенням поверхня другого порядку є множиною точок $M(x, y, z)$, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0.$

3.7.5 Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Величини $a, b, c > 0$ називаються ***параметрами еліпсоїда***.

Дослідимо форму еліпсоїда *методом перерізів*. Зробимо переріз еліпсоїда за допомогою площини $z = h$. В перерізі вийде крива

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $|h| > c$, то перерізом буде порожня множина; якщо $h = c$, то — точка $(0; 0; c)$; якщо ж $|h| < c$, то перерізом стане еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(as)^2} + \dfrac{y^2}{(bs)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

де $s = \sqrt{1 - h^2/c^2}$. Причому еліпс буде тим більшим, чим меншим буде $|h|$. Найбільший еліпс, якому відповідає $h = 0$, називається ***головним перерізом*** еліпсоїда. Аналогічно можна показати, що перерізи еліпсоїда площинами, паралельними двом іншим координатним площинам, в загальному випадку теж будуть або порожньою множиною, або точкою, або еліпсом. Таким чином, еліпсоїд має ще два головних перерізи.

Парність степенів змінних показує, що еліпсоїд є поверхнею, симетричною відносно координатних площин, координатних осей і цент ральносиметричним відносно початку координат.

Все це дає основу для побудови еліпсоїда (рис. 3.24).

Точки перетину еліпсоїда з осями симетрії називаються його ***вершинами***, відрізки, які він відтинає на осях симетрії — його ***осями***, а центр симетрії називають ***центром еліпсоїда***.

Якщо $a = b$, то канонічне рівняння еліпсоїда набирає вигляду

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Маємо поверхню обертання еліпса

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

навколо координатної осі Oz, яка називається ***еліпсоїдом обертання***. Якщо $a = \max(a, b, c)$, то еліпсоїд називається ***стиснутим*** (рис. 3.25, а)), якщо ж $a = \min(a, b, c)$, то еліпсоїд називається ***витягнутим*** (рис. 3.25, б)).

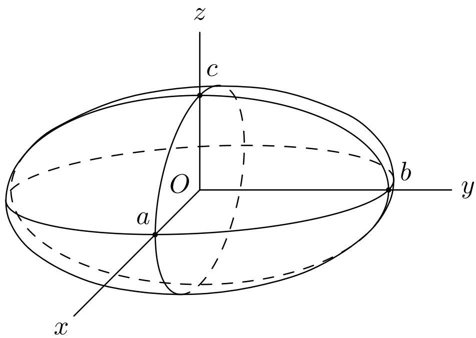

Рис. 3.24: Еліпсоїд і його головні перерізи

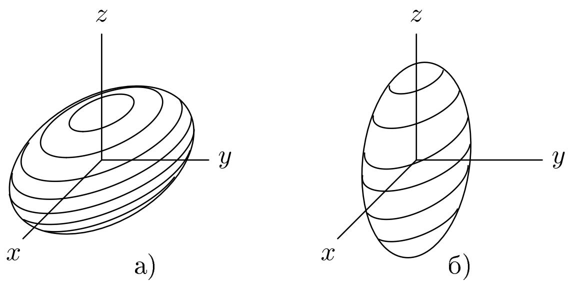

Рис. 3.25: Еліпсоїд обертання: а) стиснутий, б) витягнутий

3.7.6 Уявний еліпсоїд

Уявним еліпсоїдом називається поверхня, яка в придатній системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Оскільки нема точки простору, яка задовольнила б це рівняння, поверхня названа уявною.

3.7.7 Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Величини $a, b, c > 0$ називаються ***параметрами*** цієї поверхні.

Дослідження однопорожнинного гіперболоїда методом перерізів показує, що він має площини симетрії, які є його ***головними перерізами***. Головний переріз площиною xOy є еліпсом, який називається ***горловим***, інші два головних перерізи — гіперболи. Координатні осі є осями симетрії, початок координат — центром симетрії, або просто ***центром*** однопорожнинного гіперболоїда. Точки перетину однопорожнинного гіперболоїда з осями симетрії називаються його ***вершинами***, відрізки, які він відтинає на осях симетрії — його ***дійсними*** осями, а відрізок на осі симетрії, яку він не перетинає, довжини $2c$ з центром в центрі однопорожнинного гіперболоїда — його ***уявною*** віссю. Зображення цієї поверхні див. на рис. 3.26.

Якщо $a = b$, то канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда набирає вигляду

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Маємо поверхню обертання гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases}$$

навколо її уявної осі Oz. Ця поверхня називається ***однопорожнинним гіперболоїдом обертання***.

Важливою особливістю однопорожнинного гіперболоїда є те, що він являє собою ***лінійчату*** поверхню. Такою поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої. Перетворимо канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда таким чином:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

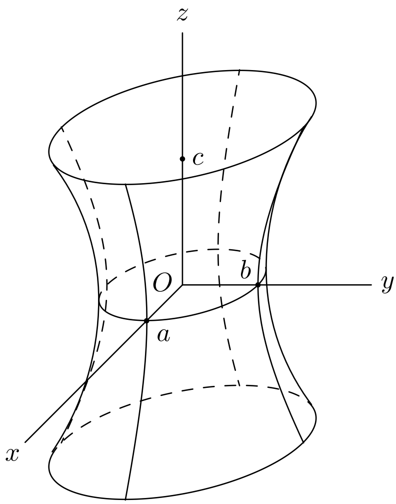

Рис. 3.26: Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \tag{3.29}$$

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{3.30}$$

де λ — довільний параметр. Для конкретного значення λ ця система визначає пряму лінію, а зміна цього параметра імітує рух прямої. Якщо перемножити рівняння системи, вийде рівняння (3.29) однопорожнинного гіперболоїда. Тому будь-яка точка прямої (3.30) міститься на цій поверхні. Прямі (3.30) називаються ***прямолінійними твірними*** однопорожнинного гіперболоїда. Так само показується, що прямі

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

теж належать однопорожнинному гіперболоїду і теж називаються його прямолінійними твірними. Однопорожнинний гіперболоїд, утворений своїми прямолінійними твірними показано на рис. 3.27.

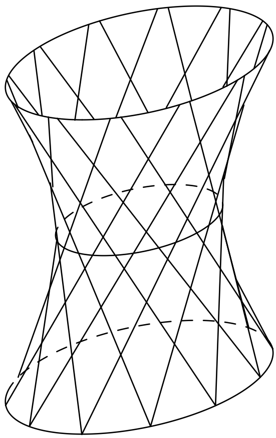

Рис. 3.27: Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

Однопорожнинні гіперболоїди знайшли застосування в будівництві. Телевізійна башта на Шаболовці в Москві була побудована з секцій однопорожнинних гіперболоїдів обертання за проектом інженера В.Г. Шухова. Ця споруда поєднує міцність конструкції разом з простотою її виконання.

3.7.8 Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Величини $a, b, c > 0$ називаються ***параметрами*** цієї поверхні.

Як і однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний має площини симетрії, які є його ***головними перерізами***. Правда, головний переріз площиною xOy порожній, бо не перетинає поверхні, інші два головних переріза — гіперболи. Координатні осі є осями симетрії, початок координат — центром симетрії, або просто ***центром*** двопорожнинного гіперболоїда. Точки перетину двопорожнинного гіперболоїда з осями симетрії називаються його ***вершинами***, щоправда, він перетинає тільки вісь Oz. Відрізок, який він відтинає на осі симетрії, називається його ***дійсною віссю***, а відрізки на осях симетрії, які він не перетинає, довжини, відповідно, $2a$ і $2b$ з центром в центрі двопорожнинного гіперболоїда — його ***уявними осями***. Зображення цієї поверхні див. на рис. 3.28.

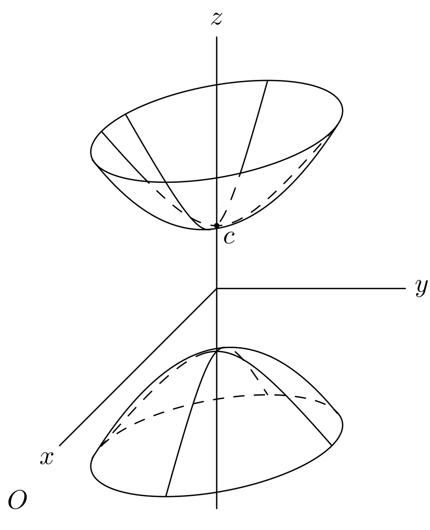

Рис. 3.28: Двопорожнинний гіперболоїд

Якщо $a = b$, то канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда на-

бирає вигляду
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$
Маємо поверхню обертання гіперболи
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \\ x=0, \end{cases}$$
навколо її дійсної осі Oz. Така поверхня називається ***двопорожнинним гіперболоїдом обертання***.

3.7.9 Конус другого порядку

Конусом другого порядку називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$
Величини $a, b, c > 0$ називаються ***параметрами конуса***. З цього рівняння випливає, що конус має три площини симетрії, які збігаються з координатними площинами, три осі симетрії, які збігаються з осями координат, а центром симетрії є початок координат, який називають ***вершиною*** конуса. Перерізи конуса площинами його симетрії називають ***головними перерізами***. Ними є дві пари прямих, що перетинаються в вершині конуса, а одним головним перерізом є початок координат. Перетином конусу площиною $z = c$ є еліпс
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c. \end{cases} \tag{3.31}$$
Звідси можна побачити геометричний зміст параметрів конуса другого порядку: a і b — довжини півосей еліпсів, перерізів конуса площиною $z = \pm c$. Зображення цієї поверхні див. на рис. 3.29.

Рівняння (3.31) можна вважати напрямною конічної поверхні з вершиною O. Дійсно, використовуючи рівняння (3.27), дістаємо канонічне рівня-

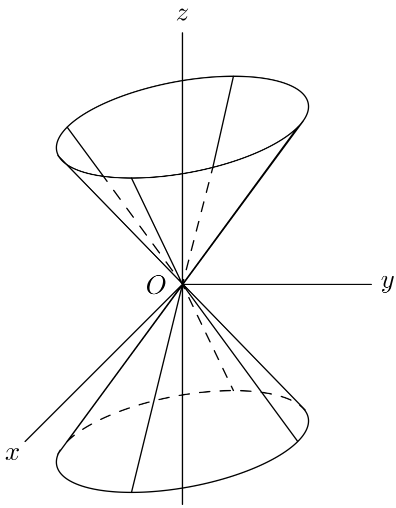

Рис. 3.29: Конус другого порядку

ння конуса другого порядку

$$c^2\frac{x^2}{a^2z^2}+c^2\frac{y^2}{b^2z^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Таким чином, конус другого порядку є конічною поверхнею.

Якщо $a=b$, то канонічне рівняння конуса набирає вигляду

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{3.32}$$

з якого можна зробити висновок, що такий конус є поверхнею обертання кривої

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ x=0, \end{cases}$$

навколо осі Oz. Останню систему рівнянь можна перетворити на

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

з чого видно, що крива насправді є двома прямими

$$\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

що перетинаються в початку координат.

Оскільки перерізи конуса (3.32) площинами $z = h$, $h > 0$, вже будуть не еліпсами, а колами, то такий конус називається ***коловим***.

3.7.10 Уявний конус

Уявним конусом другого порядку називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Тільки одна точка — початок координат — задовольняє це рівняння, тому поверхня названа уявною.

3.7.11 Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Величини $p, q > 0$ називаються ***параметрами*** еліптичного параболоїда. Еліптичний параболоїд має дві площини симетрії, які збігаються з координатними площинами xOz і yOz, і одну вісь симетрії, яка збігається з віссю Oz. Перерізи еліптичного параболоїда з площинами симетрії називаються його ***головними перерізами***. Головні перерізи еліптичного параболоїда — параболи. Площини $z = h$, $h > 0$, перетинають еліптичний параболоїд по еліпсах. Точку перетину еліптичного параболоїду з віссю симетрії називають його вершиною. Зображення цієї поверхні див. на рис. 3.30.

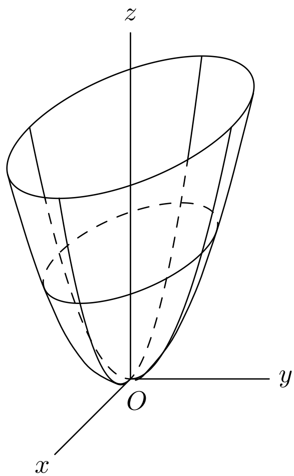

Рис. 3.30: Еліптичний параболоїд

Якщо $p = q$, то канонічне рівняння еліптичного параболоїду набирає вигляду

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z,$$

з якого видно, що в даному випадку маємо поверхню обертання, утворену обертанням параболи

$$\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0, \end{cases}$$

навколо осі Oz. Таку поверхню називають ***параболоїдом обертання***.

3.7.12 Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій системі координат має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{3.33}$$

Величини $p, q > 0$ називаються ***параметрами*** гіперболічного параболоїда.

Він має дві площини симетрії, які збігаються з координатними площинами xOz і yOz, і одну вісь симетрії, яка збігається з віссю Oz.

Перерізи гіперболічного параболоїда площинами $x = \pm m$ є параболами, вітки яких напрямлені вниз. Його перерізи площинами $y = \pm n$ теж є параболами, але їх вітки напрямлені вгору. Перерізом поверхні площиною xOy є пара прямих, що проходять через початок координат і розміщені симетрично відносно осей Ox і Oy. Перерізами гіперболічного параболоїда площинами $z = n$, $n > 0$, є гіперболи, дійсною віссю яких є вісь Ox, а площинами $z = -n$, $n > 0$, є теж гіперболи, але з дійсною віссю Oy. Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Його зображення показане на рис. 3.31.

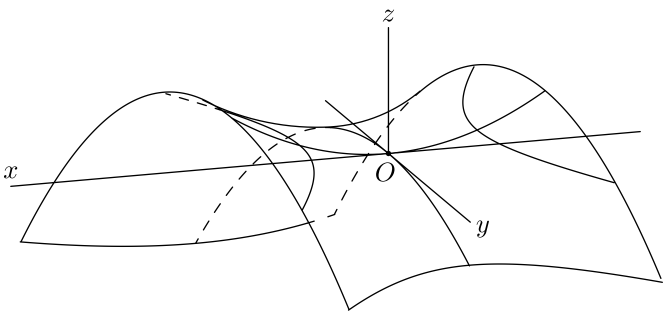

Рис. 3.31: Гіперболічний параболоїд

Як і однопорожнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд теж є лінійчатою поверхнею. Дійсно, перетворимо рівняння (3.33) на таке:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z, \tag{3.34}$$

а далі побудуємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \lambda, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{\lambda}, \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \mu, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{\mu}. \end{cases}$$

Кожна з цих систем визначає сім'ю прямих, що називаються ***прямолінійними твірними гіперболічного параболоїда***. Неважко перевірити, що множення першого рівняння на друге в обох випадках дає рівняння (3.34). Тому будь-яка точка прямолінійної твірної належить гіперболічному параболоїду.

3.7.13 Еліпс, гіпербола й парабола як конічні перерізи

Можна показати, що перерізом будь-якого колового конуса площиною, що не проходить через його вершину, є крива, яка може бути лише еліпсом, гіперболою або параболою (рис. 3.32).

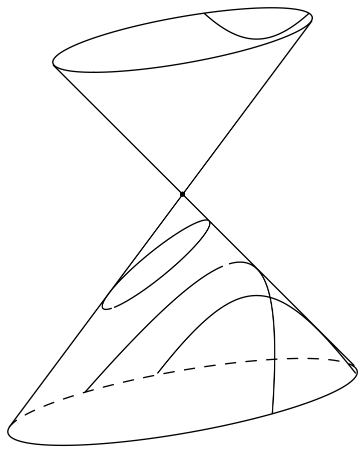

Рис. 3.32: Конічні перерізи

Вправа 3.16. *Сфера $x^2+y^2+z^2 = 4z$ освітлена променями, які паралельні прямій $x = 0$, $y = z$. Знайти форму тіні сфери на площині xOy.*

Вправа 3.17. *Нехай функція трьох змінних $F(x, y, z)$ однорідна відносно x, y і z, тобто*

$$\forall(t \neq 0)\exists(s \in R)\ F(tx, ty, tz) = t^s F(x, y, z).$$

Показати, що рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає конус з вершиною в початку координат, причому для будь-якого h крива

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, 1\right) = 0, \\ z - h = 0, \end{cases}$$

є його напрямною.

Вправа 3.18. *Довести, що рівняння*

$$e^{-y^2} = \ln z + e^{z^2}$$

є рівнянням поверхні обертання і визначити вісь обертання і криву, яка обертається навколо цієї осі, утворюючи задану поверхню.

Вправа 3.19. *Встановити, яка лінія є перерізом еліпсоїда*

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$$

площиною $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ і знайти її центр.

Вправа 3.20. *Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перерізає однопорожнинний гіперболоїд*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

по прямолінійним твірним. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

Вправа 3.21. *Знайти точки перетину поверхні*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$$

з прямою $x - 3 = y - 1 = \frac{z-6}{3}$.

3.7. Поверхні

Вправа 3.22. *Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, напрямна якого задана рівняннями*

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Вправа 3.23. *Встановити, для яких значень* m *площина* $x + my - 2 = 0$ *перерізає еліптичний параболоїд*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y:$$

а) по еліпсу, 2) по параболі.

Вправа 3.24. *Скласти рівняння поверхні , утвореної прямою, що ковзає по прямим*

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

і

$$\frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$$

і залишаєтьcя весь час паралельною площині $2x + 3y - 5 = 0$.

Вправа 3.25. *Знайти криві, які є перерізами конуса другого порядку*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0$$

площинами: 1) $z = y/5 + 1$, *2)* $y = 1$, *3)* $y + 2z + 1 = 0$.

Предметний покажчик

Література

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

[3] Меркин Д.Р. Алгебра свободных и скользящих векторов. – М.: Физматгиз, 1962.

[4] Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – Київ: Либідь, 1994.

[5] Волченко Ю.М. Лінійні простори та лінійні оператори. – Донецьк, ДонІЗТ, 2003.

[6] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, ч. I.

[7] Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. – М.: Наука, 1981.

[8] Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

[9] Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964.

[10] Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983.

Волченко Юрій Михайлович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Векторна алгебра та аналітична геометрія
(для студентів спеціальності АТЗ)

Комп'ютерний макет *Волченко Ю.М.*

Технічні редактори *Григор'єва Л.В.*
Ростовцева О.О.

Підписано до друку
Формат $60 \times 84/16$. Папір офс. Гарн. Times New Roman
Друк ксероксний
Умов. друк. арк. 5,9. Обл.-вид. арк. 5,7 Наклад прим. Зам. № .

Донецький інститут залізничного транспорту

Надруковано в редакційно-видавничому відділі ДонІЗТ
Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 22.06.2004 р.,
серія ДК № 1851

83018, м. Донецьк – 18, вул. Горна, 6.