ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

УКРАЇНСЬКОЇ ДЕРЖАВНОЇ АКАДЕМІЇ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ІНФРАСТРУКТУРА ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

Ю.М. ВОЛЧЕНКО

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Для студентів спеціальності
«Автоматика та автоматизація на транспорті»

Донецьк 2008

Волченко Ю. М. Елементи теорії масового обслуговування. Конспект лекцій. – Донецьк: ДонІЗТ, 2008. – 45 с.

Методичний посібник містить матеріал лекцій, які автор читав студентам спеціальності «Організація перевезень і управління на залізничному транспорті» і суттєво перероблений для студентів спеціальності «Автоматика та автоматизація на транспорті». В першій частині замінені приклади, що супроводжують викладання теорії, на такі, що більше відповідають останній спеціальності. Додано другу частину, в якій розглядаються методи статистичного моделювання систем масового обслуговування, запропоновані автором.

Іл. 9, бібліогр. 29 найм.

Конспект лекцій розглянуто й рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 вересня 2007 р., протокол № 1.

Рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету «Інфраструктура залізничного транспорту» від 4 вересня 2007 р., протокол № 4.

Рецензенти:

Проф., д.т.н. В.М. Ткаченко,
доц., к.т.н. В.Я. Броді

Зміст

Лекція 1
Аналітичні методи дослідження СМО

1.1 Основні поняття. Класифікація СМО

Предметом теорії масового обслуговування є побудова, аналіз і оптимізація моделей процесів, пов'язаних із задоволенням масового попиту на обслуговування будь-якого типу, в умовах, коли попит і обслуговування носять випадковий характер. Об'єктами застосування теорії можна назвати підприємства залізничного, автомобільного і повітряного транспорту, телефонні станції, мережі ЕОМ, підприємства масового обслуговування і багато що інше. Зокрема, на залізничному транспорті методи теорії масового обслуговування використовуються для розрахунку раціональної організації подачі вагонів під вантаження і розвантаження, для розрахунку потужностей пунктів поточного ремонту вагонів, для вибору раціонального числа касових апаратів на вокзалах і станціях метрополітену. Природно, як і в кожній науці, в теорії масового обслуговування є власна термінологія. Познайомимося з нею.

Заявкою (вимогою) називається необхідність в однократному обслуговуванні. Наприклад, ви стали в чергу в залізничну касу, це означає, ви і є заявка, яка потребує обслуговування (в купівлі квитка). Корабель підійшов до причалу для навантаження — він і є заявкою.

Системою масового обслуговування (СМО) називається система обслуговуючих пристроїв, що називають ***каналами обслуговування***. Розрізняють ***одно-*** і ***багатоканальні*** СМО. Наприклад, залізничний касир — канал обслуговування, причал в морському порту — канал обслуговування.

Надходження заявки в СМО або її вихід зі СМО називається ***подією***. Послідовність заявок, що надходять у СМО, називається ***вхідним***, а що виходять зі СМО — ***вихідним потоком*** заявок.

Нехай заявка, що надходить, застає всі канали зайнятими. Якщо вона, не чекаючи обслуговування, покидає СМО, то СМО називається ***СМО з відмовами*** ;якщо ж заявка стає в чергу, чекаючи вивільнення одного з каналів, то СМО називається ***СМО з чергою***.

Якщо число місць в черзі і час чекання в ній обмежені, СМО відносять до ***СМО змішаного типу***.

СМО з чергою називається ***відкритою***, якщо інтенсивність надходячого потоку заявок не залежить від стану самої СМО; в протилежному випадку вона називається ***замкненою***. СМО можуть відрізнятися за так званою ***дисципліною обслуговування***. В одних СМО заявки обслуговуються в порядку надходження, в інших — у випадковому порядку, в третіх — деякі заявки обслуговуються поза чергою (***СМО з пріоритетом***) і т.д.

1.2 Найпростіший потік заявок

Потік заявок називається ***найпростішим***, якщо він має такі властивості:

1) (*стаціонарність*) ймовірність надходження однієї заявки за час t дорівнює

$$\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

де λ — інтенсивність потоку заявок;

2) (*ординарність*) ймовірність надходження більш однієї заявки за час Δt дорівнює

$$o\,(\Delta t)\,;$$

3) (*відсутність післядії*) кількості заявок, які надійшли в неперетинні часові інтервали $\Delta_1,\ \dots,\Delta_n$, є незалежними в.в.

Розглянемо в.п. $A_i =$«Надійде i заявок» і в.в. $X\,(t)$ — кількість заявок, що надійшли за час t. Очевидно, $X\,(t)$ — марковський ланцюг з неперервним часом, причому, як випливає з властивостей стаціонарності й ординарності, зі стану A_i він може перейти лише в стан A_{i+1} з інтенсивністю λ. Цьому ланцюгу Маркова відповідає граф інтенсивностей, показаний на рис. 1.1 і матриця інтенсивностей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A_0} \xrightarrow{\lambda} \boxed{A_1} \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} \boxed{A_{i-1}} \xrightarrow{\lambda} \boxed{A_i} \xrightarrow{\lambda} \boxed{A_{i+1}} \xrightarrow{\lambda} \dots$$

Рис. 1.1: Граф процесу надходження заявок

Граф інтенсивностей показує, що цей в.п. можна назвати процесом ***чистого розмноження***, причому, цей процес має зчисленне число станів.

Такому процесу відповідає система рівнянь Колмогорова [5, (11.5)]:

$$\begin{cases} p_0' = -\lambda p_0, & p_0(0) = 1; \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ p_i' = \lambda p_{i-1} - \lambda p_i, & p_i(0) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.1}$$

$i \geq 1$. Розв'яжемо її, зробивши заміну $p_i = e^{-\lambda t}\varphi_i(t)$, $p_i' = -\lambda e^{-\lambda t}\varphi_i + e^{-\lambda t}\varphi_i'$, після чого система стане такою:

$$\begin{cases} -\lambda e^{-\lambda t}\varphi_0 + e^{-\lambda t}\varphi_0' = -\lambda e^{-\lambda t}\varphi_0, & p_0(0) = \varphi_0(0) = 1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda e^{-\lambda t}\varphi_i + e^{-\lambda t}\varphi_i' = \lambda e^{-\lambda t}\varphi_{i-1} - \lambda e^{-\lambda t}\varphi_i, & p_i(0) = \varphi_i(0) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \varphi_0' = 0, & \varphi_0(0) = 1; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi_i' = \lambda\varphi_{i-1}, & \varphi_i(0) = 0; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.2}$$

Перше рівняння має розв'язок

$$\varphi_0(t) = 1. \tag{1.3}$$

Покажемо, що інші рівняння мають розв'язок вигляду

$$\varphi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!},\ i = 1, 2, \dots. \tag{1.4}$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Очевидно, внаслідок формули (1.3) твердження (1.4) виконується для $i = 0$. Нехай воно виконується для деякого $i = k - 1$:

$$\varphi_{k-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{1.5}$$

Покажемо, що воно залишається справедливим і для $i = k$. Дійсно, якщо формула (1.5) справедлива, то k-е рівняння системи (1.2) набере вигляд

$$\varphi_k' = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!},\ \varphi_k(0) = 0.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\varphi_k = \lambda \frac{\lambda^{k-1} t^k}{(k-1)!k} + C.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо, що $\varphi_i(0) = C = 0$. Таким чином, розв'язком є функція

$$\varphi_k = \frac{\lambda^k t^k}{k!},$$

яка збігається з функцією (1.4) при $i = k$. Доведення завершено. Таким чином, в загальному випадку розв'язком системи (1.2) є функція

$$\varphi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

а розв'язком системи (1.1) — функція

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t},\ i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.6}$$

Отримана функція $p_i(t)$ є для кожного t щільністю ймовірностей пуассонівського розподілу з параметром λt. Тому найпростіший потік називають також ***пуассонівським***.

З останньої формули виходить, що ймовірність того, що за час t не надійде жодної заявки, дорівнює

$$p_0(t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Нехай T — випадковий інтервал часу між двома послідовними надходженнями заявок. На підставі попередньої формули знайдемо його розподіл:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - P(X(t) = 0) = \\ = 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0,$$

і $F(t) = 0$ для $t \leq 0$. Бачимо, що інтервал часу між надходженнями двох заявок розподілений по показниковому закону з параметром λ. Тому $\mathbf{M}T = \sigma_T = 1/\lambda$.

1.3 Марковські СМО

Для задання СМО, треба, окрім характеристик вхідного потоку заявок, вказати розподіл в.в. $T_{\text{об}}$, часу обслуговування однієї заявки. Часто буває, що ця в.в. розподілена за показниковим законом:

$$F_{T_{\text{об}}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0; \end{cases}$$

де μ — інтенсивність потоку обслуговування. ***Потоком обслуговування*** називається потік заявок, що обслуговуються одним і тим самим каналом. Якщо $T_{\text{об}}$ має показниковий розподіл, то потік обслуговування називається ***найпростішим***.

СМО, в якій вхідний потік і всі потоки обслуговування — найпростіші, називається ***марковською СМО***, оскільки СМО тоді є марковським ланцюгом з дискретними станами і неперервним часом.

Приклад 1.1. *Прилад складається з $m = 3$ вузлів, які можуть замінювати один одного. Для роботи приладу достатньо, щоб працював хоча б один вузол. При виході з ладу одного з вузлів прилад продовжує нормально функціонувати, доки не вийдуть з ладу всі вузли. Потік відмов кожного вузла — найпростіший. Середній час безвідмовної роботи одного вузла*

$t = 20$ годин. При виході з ладу вузол починає відразу ремонтуватися. Час ремонту розподілений по показниковому закону і в середньому складає $s = 4$ години. У початковий момент часу всі вузли справні. Знайти середню продуктивність приладу, якщо з виходом з ладу кожного вузла прилад втрачає $(100/m)\,\%$ своєї продуктивності.

Розв'язання. Нехай A_i — подія, яка полягає в тому, що i вузлів приладу знаходяться в ремонті (i відмов). Потоки відмов і відновлення є найпростішими, тому їх інтенсивності обчислюються за формулами

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{M}T} = \frac{1}{20},$$

де T — проміжок часу між двома відмовами (час безвідмовної роботи);

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{M}T_{\text{об}}} = \frac{1}{4}.$$

Перехід зі стану A_i може відбутися або в стан A_{i+1} з інтенсивністю $\lambda_i = (m - i)/t = \lambda\,(m - i)$, або в стан A_{i-1} з інтенсивністю $\mu_i = i/s$. Таким чином, маємо марковський ланцюг з графом інтенсивностей, показаним на рис. 1.2. Використовуючи формули

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A_0} \arrow[r, shift left, "\lambda_0 = 3/20"] & \boxed{A_1} \arrow[l, shift left, "\mu_1 = 1/4"] \arrow[r, shift left, "\lambda_1 = 2/20"] & \boxed{A_2} \arrow[l, shift left, "\mu_2 = 2/4"] \arrow[r, shift left, "\lambda_2 = 1/20"] & \boxed{A_3} \arrow[l, shift left, "\mu_3 = 3/4"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.2: Граф інтенсивностей до прикладу 1.1

граничних імовірностей для процесу розмноження й загибелі (С.3) і (С.4), дістаємо

$$p_0 = \left(1 + \frac{3}{20}\cdot 4 + \frac{6}{400}\cdot 8 + \frac{6}{8000}\cdot\frac{64}{6}\right)^{-1} =$$

$$= (1 + 0,6 + 0,12 + 0,008)^{-1} = \frac{1}{1,728} \approx 0,579;$$

$$p_1 = 0,6 \cdot \frac{1}{1,728} \approx 0,347;$$

$$p_2 = 0,12 \cdot \frac{1}{1,728} \approx 0,069;$$

$$p_3 = 0,008 \cdot \frac{1}{1,728} \approx 0,005.$$

Середня продуктивність обчислюється за формулою

$$\overline{\text{Пр}} = \left(p_0 + \frac{m-1}{m} p_1 + \dots + \frac{m-i}{m} p_i + \dots + \frac{0}{m} p_m\right) 100\% =$$

$$= \left(0,579 + \frac{2}{3} \cdot 0,347 + \frac{1}{3} \cdot 0,069\right) 100\% = 83,3\%.$$

□

1.4 Показники ефективності СМО

A — ***абсолютна пропускна спроможність***, середнє число заявок, що СМО обслуговує в одиницю часу.

$Q = A/\lambda$ — ***відносна пропускна спроможність***, ймовірність обслуговування заявки, що надійшла.

$P_{\text{відм}} = 1 - Q$ — ***ймовірність відмови***.

$\overline{z}$ — ***середнє число заявок в СМО*** (що обслуговуються або чекають в черзі).

$\overline{r}$ — ***середнє число заявок в черзі*** (якщо є черга).

$\overline{t}_{\text{с}}$ — ***середній час перебування заявки в СМО*** (для обслуговування і в черзі).

$\overline{t}_{\text{ч}}$ — ***середній час перебування заявки в черзі***.

$\overline{k}$ — ***середнє число зайнятих каналів***.

Для відкритих СМО і стаціонарних вхідному потоці й потоці обслуговування справедливі формули

$$\boxed{\bar{t}_{\text{с}} = \frac{\overline{z}}{\lambda}, \quad \bar{t}_{\text{ч}} = \frac{\overline{r}}{\lambda}, \quad \overline{k} = \frac{A}{\mu},}$$

де λ — інтенсивність потоку заявок, μ — інтенсивність потоку обслуговування.

Лекція 2
Деякі типи СМО

В стислому вигляді інформацію про СМО записують таким чином:

Розподіл вхідного потоку заявок	Розподіл часу обслуговування	Число каналів обслуговування	Місткість накопичувача

Наприклад, **Пуас/Показ/5/0** означає п'ятиканальну СМО з пуассонівським вхідним потоком, показниковим законом розподілу часу обслуговування і відсутністю накопичувача.

2.1 Пуас/Показ/N/0

Нехай в.п. A_i означає, що i каналів зайнято обслуговуванням заявок, а решта каналів вільна. Позначимо λ інтенсивність вхідного потоку заявок, а μ — інтенсивність обслуговування. Функціонування СМО можна подати у вигляді, показаному на рис. 2.1.

Зі стану A_i з інтенсивністю λ можна перейти або в стан A_{i+1}, якщо надійде ще одна заявка, або в стан A_{i-1} з інтенсивністю $i\mu$, якщо від обслуговування звільниться *хоча б один канал.* Отже, в відповідному процесі розмноження й загибелі треба взяти $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = i\mu$. Граф інтенсивностей показано на рис. 2.2.

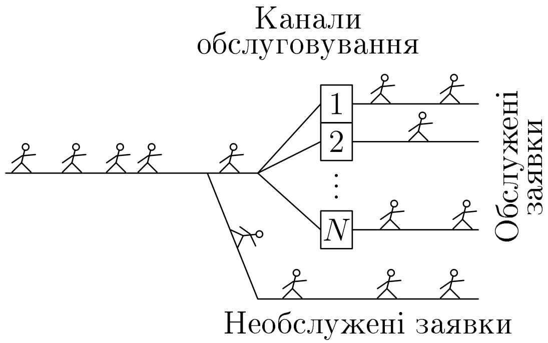

Рис. 2.1: Схема функціонування СМО

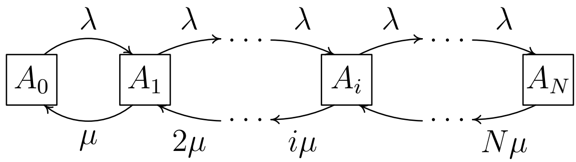

Рис. 2.2: Граф інтенсивностей для СМО **Пуас/Показ/N/0**

З формул (С.3), (С.4), позначивши $\rho = \lambda/\mu$, дістанемо

$$\frac{\lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_i} = \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} = \frac{\rho^i}{i!}$$

і тому,

$$\boxed{\begin{aligned} &p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^N}{N!}\right)^{-1}, \\ &p_i = \frac{\rho^i}{i!}\, p_0,\ i = \overline{0, N}. \end{aligned}} \tag{2.1}$$

Ці рівності називаються ***формулами Ерланга***.

Для даної СМО показники ефективності приймають такий вигляд. Абсолютна пропускна спроможність $A = (1 - p_N)$ дорівнює добутку інтенсивності вхідного потоку заявок на ймовірність того, що хоча б один канал вільний. Відносна пропускна спроможність $Q = 1 - p_N$ дорівнює згаданій ймовірності. Інші показники: $P_{\text{відм}} = p_N$, $\overline{k} = \rho\,(1 - p_N)$. Величина $\rho = \lambda/\mu$ називається ***коефіцієнтом завантаження системы***.

Приклад 2.1. *Міське залізничне довідкове бюро має 5 різних телефонних номерів. Потік викликів — простий з інтенсивністю $\lambda = 6$ викликів в хв. Середній час, що витрачається на довідку, дорівнює 2/3 хв. Цей час розподілений за показниковим законом. Знайти абсолютну й відносну пропускні спроможності довідкового бюро; ймовірність відмови; середнє число зайнятих каналів. Визначити, скільки різних телефонних номерів повинна мати довідкова, щоб імовірність відмови не перевищувала 0,07?*

Розв'язання. За умовою задачі середній час обслуговування дорівнює $\overline{T}_{\text{про}} = 2/3$. Тоді інтенсивність обслуговування дорівнює $\mu = 1/\overline{T}_{\text{про}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Окрім того, коефіцієнт завантаження довідкового бюро $\rho = \lambda/\mu = 6/1{,}5 = 4$, $N = 5$. Ймовірність станів довідкового бюро обчислимо за формулами Ерланга (2.1):

$$p_0 = \left(1 + 4 + 8 + \frac{64}{6} + \frac{256}{24} + \frac{1024}{120}\right)^{-1} = 0{,}023;$$
$$p_1 = 0{,}093;\ p_2 = 0{,}187;\ p_3 = p_4 = 0{,}249;\ p_5 = 0{,}199.$$

Знайдемо показники ефективності роботи довідкового бюро: абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda\,(1 - p_5) = 6 \cdot 0{,}801 = 4{,}806$ (довідкова дає в середньому 4,8 довідки за хв.); відносна пропускна спроможність $Q = 1 - p_5 = 0{,}801$ (ймовірність обслуговування заявки); ймовірність відмови $P_{\text{відм}} = p_5 = 0{,}199$; середнє число зайнятих каналів $\overline{k} = \rho\,(1 - p_5) = 3{,}204$. Оскільки ймовірність відмови більше заданої ймовірності 0,07, то спробуємо збільшити число телефонних номерів на один номер. Тоді N буде дорівнювати 6 і перерахунок імовірності дасть

$$p_0 = \left(1 + 4 + 8 + \frac{64}{6} + \frac{256}{24} + \frac{1024}{120} + \frac{4096}{720}\right)^{-1} = 0{,}02;$$
$$p_6 = \frac{4096}{720} \cdot 0{,}02 = 0{,}11 > 0{,}07.$$

Отже, шести телефонних номерів буде мало і треба спробувати збільшити кількість телефонних номерів до семи. Знову виконаємо перерахунок, але для $N = 7$:

$$p_0 = \left(1 + 4 + 8 + \frac{64}{6} + \frac{256}{24} + \frac{1024}{120} + \frac{4096}{720} + \frac{16384}{5040}\right)^{-1} = 0{,}019;$$
$$p_7 = \frac{16384}{5040} \cdot 0{,}019 = 0{,}063 < 0{,}07.$$

Таким чином, щоб імовірність відмови не перевищувала 0,07, необхідно збільшити число телефонних номерів довідкового бюро до 7. □

2.2 Пуас/Показ/N/m

На відміну від попередньої СМО розглянемо СМО, що має в своєму складі накопичувач на m місць чекання в черзі. Заявка, що надійшла в СМО і застала накопичувач зайнятим m заявками, що чекають обслуговування, залишає СМО без обслуговування. Якщо канал зайнятий обслуговуванням, а вільне місце в накопичувачі є, заявка це місце займає і чекає в черзі доти, доки її не обслужать. Нарешті, якщо канал вільний від обслуговування (це означає, що і заявок в черзі немає), заявка поступає в нього і негайно обслуговується. Схематично функціонування такої СМО показано на рис. 2.3.

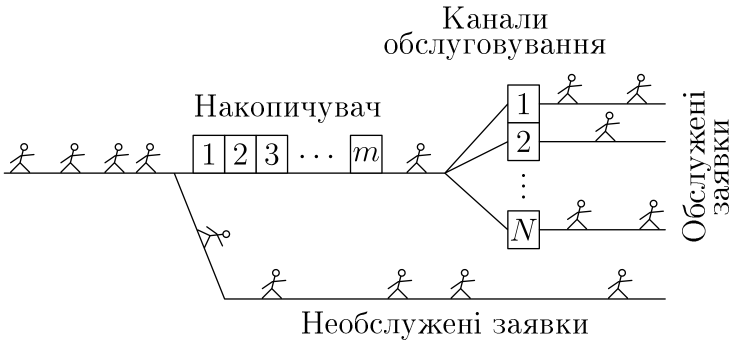

Рис. 2.3: Функціонування СМО з накопичувачем

Різними станами процесу вважатимемо такі ситуації

$$A_i = \begin{cases} i \text{ каналов зайняті}, & i = \overline{0, N}; \\ \text{Всі канали зайняті}, & \\ \text{в черзі } i - N \text{ заявок}, & i = \overline{N+1, N+m}. \end{cases}$$

Відповідно до цього граф інтенсивностей для процесу розмноження й загибелі набуває вигляд, показаний на рис. 2.4. Підра-

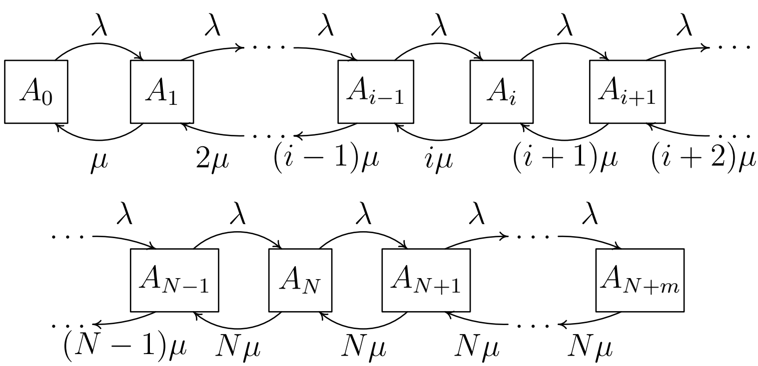

Рис. 2.4: Граф інтенсивностей для СМО с накопичувачем

хуємо ймовірність станів СМО за формулами (С.3), (С.4), враховуючи особливості графа інтенсивностей:

$$p_0 =$$
$$= \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \frac{\lambda^N}{N!\mu^N} + \frac{\lambda^{N+1}}{N \cdot N!\mu^{N+1}} + \dots + \frac{\lambda^{N+m}}{N^m N!\mu^{N+m}}\right)^{-1} =$$
$$= \left[1 + \rho + \dots + \frac{\rho^N}{N!} + \frac{\rho^N}{N!}\left(\frac{\rho}{N} + \dots + \frac{\rho^m}{N^m}\right)\right]^{-1},$$

або

$$\boxed{\begin{array}{l} p_0 = \left(\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^N}{N!}\sum\limits_{j=1}^{m} \varkappa^j\right)^{-1}; \\ p_i = \frac{\rho^i}{i!}\, p_0,\ i = \overline{1,N};\ p_{N+j} = \frac{\rho^N}{N!}\, \varkappa^j p_0,\ j = \overline{1,m}; \end{array}} \tag{2.2}$$

де $\rho = \lambda/\mu$, $\varkappa = \rho/N$.

Показники ефективності СМО обчислюють, виходячи з таких міркувань. Ймовірність відмови дорівнює ймовірності того, що всі N каналів обслуговування будуть зайняті і місць в черзі не буде, тобто величині $P_{\text{відм}} = p_{N+m}$. Формули для абсолютної й відносної пропускних спроможностей залишаються формально тими самими: $A = \lambda\,(1 - P_{\text{відм}})$, $Q = 1 - P_{\text{відм}}$, але ймовірність відмови набула, як ми бачили, інше значення. Те ж можна сказати про середнє число зайнятих каналів: $\overline{k} = \rho\,(1 - P_{\text{відм}})$. На прикладі даної СМО познайомимося з обчисленням такої характеристики як середнє число заявок в черзі:

$$\overline{r} = \sum_{j=1}^{m} j p_{N+j} = \sum_{j=1}^{m} j \frac{\rho^N}{N!}\, \varkappa^j p_0 = \frac{p_0 \rho^N}{N!}\, \varkappa \left(\sum_{j=1}^{m} \varkappa^j\right)' =$$

$$= \frac{p_0\rho^N}{N!}\,\varkappa\left(\frac{\varkappa-\varkappa^{m+1}}{1-\varkappa}\right)' =$$
$$= \frac{p_0\rho^N\varkappa}{N!}\cdot\frac{\left[1-(m+1)\,\varkappa^m\right](1-\varkappa)+\varkappa-\varkappa^{m+1}}{(1-\varkappa)^2}.$$

Отже
$$\overline{r} = \frac{p_0\rho^N\varkappa}{N!}\cdot\frac{1-\varkappa^m\,(m+1-m\varkappa)}{(1-\varkappa)^2}.$$

На підставі цього показника ефективності обчислюємо середнє число заявок в СМО $\overline{z}=\overline{r}+\overline{k}$, середній час перебування заявки в СМО $\overline{t}_c=\overline{z}/\lambda$ і середній час перебування заявки в черзі $\overline{t}_ч = = \overline{r}/\lambda$.

Приклад 2.2 (Продовження попереднього прикладу)**.** *Припустимо, що в прикладі із залізничним довідковим бюро замість збільшення числа телефонних номерів прийнято рішення додатково встановити апарат, який у випадку, якщо телефони зайняті, ставить клієнта в чергу, монотонним голосом повідомляючи його: "Чекайте відповіді. Чекайте відповіді. ...". Припустимо, що в такому накопичувачі є всього чотири місця. Як зміняться показники ефективності роботи довідкового бюро?*

Розв'язання. В даному випадку слід враховувати також значення нових параметрів: $m=4$, $\varkappa=4/5=0{,}8$. Перш за все за формулами (2.2) обчислимо ймовірності станів СМО:

$$p_0 = [1+4+8+64/6+256/24+1024/120+$$
$$+\,1024\left(0{,}8+0{,}8^2+0{,}8^3+0{,}8^4\right)/120\big]^{-1} =$$
$$=0{,}0159;$$
$$p_1=0{,}063;\ p_2=0{,}127;\ p_3=p_4=0{,}169;\ p_5=0{,}135;$$
$$p_6=0{,}108;\ p_7=0{,}0887;\ p_8=0{,}069;\ p_9=0{,}055.$$

Показники ефективності роботи довідкового бюро стануть такими:

$$P_{\text{відм}} = p_9 = 0{,}055 < 0{,}07;\ A = 6\,(1 - 0{,}055) = 5{,}67;$$
$$Q = 1 - 0{,}055 = 0{,}945;\ \overline{k} = 4 \cdot 0{,}945 = 3{,}78;$$
$$\overline{r} = \frac{0{,}159 \cdot 8{,}33 \cdot 0{,}8}{0{,}2^2} \cdot \left[1 - 0{,}8^4\,(5 - 4 \cdot 0{,}8)\right] = 0{,}72;$$
$$\overline{z} = 0{,}72 + 3{,}78 = 4{,}5;\ \overline{t}_c = 4{,}5/6 = 0{,}75;\ \overline{t}_{\text{ч}} = 0{,}72/6 = 0{,}12.$$

Ми бачимо, що показники роботи покращали: ймовірність відмови не перевершує заданої величини 0,07; збільшилася абсолютна пропускна спроможність, а час чекання в черзі незначний. А, головне, відпала необхідність в установці додаткових телефонних апаратів. □

2.3 Пуас/Показ/N/∞

Нехай тепер кількість місць в накопичувачі необмежена. В принципі, такі черги можна собі уявити, оскільки, наприклад, черга до торговельної точки на вулиці міста має нагоду подовжуватися практично скільки завгодно. Розглянемо цей випадок як граничний для СМО попереднього п., коли $m \to \infty$. При цьому доведеться припустити, що величина $\varkappa < 1$, інакше границя існувати не буде. Функціонування такої СМО ілюструється рис. 2.5.

Здійснення граничного переходу в рівності (2.2) приведе до модифікації лише одного виразу: $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \varkappa^j = \varkappa/\left(1 - \varkappa\right)$ за формулою суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії. Тому ймовірність p_0 зміниться таким чином:

$$\boxed{p_0 = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!} \cdot \frac{1}{1 - \varkappa}\right)^{-1},} \tag{2.3}$$

а решта ймовірностей залишиться попередніми.

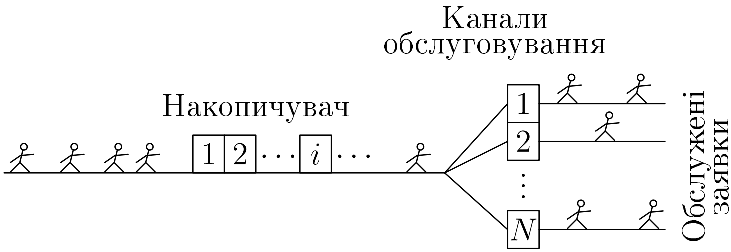

Рис. 2.5: СМО с необмеженим накопичувачем

Оскільки $m\varkappa^m \to 0$ при $m \to \infty$ і $\varkappa < 1$, то формули для показників ефективності СМО придбають вигляд

$$P_{\text{відм}} = 0,\ Q = 1 - P_{\text{відм}} = 1,\ A = Q\lambda = \lambda,\ \overline{k} = A/\mu = \rho,$$
$$\overline{r} = \frac{p_0\rho^{N+1}}{N!N\left(1-\varkappa\right)^2},\ \overline{z} = \overline{r} + \overline{k} = \overline{r} + \rho,$$
$$\overline{t}_c = \overline{z}/\lambda,\ \overline{t}_{\text{ч}} = \overline{r}/\lambda.$$

Приклад 2.3 (Продовження попереднього прикладу)**.** *Нехай апарат, що ставить клієнта в чергу на довідку, настільки потужний, що в черзі завжди є місця. Можна вважати, що в цьому випадку черга не обмежена. Знайти показники модифікованої СМО.*

Розв'язання. Величина $\varkappa = 0{,}8$ задовольняє умові $\varkappa < 1$. Проведемо перерахунок імовірностей за формулами (2.3) і (2.2):

$$p_0 = (1 + 4 + 8 + 64/6 + 256/24 + 1024/120 + 4096/600/0{,}2)^{-1} = \\ = 0{,}013;$$
$$p_1 = 0{,}052;\ p_2 = 0{,}104;\ p_3 = p_4 = 0{,}139;\ p_5 = 0{,}111;$$
$$p_6 = 0{,}089;\ p_7 = 0{,}071;\ p_8 = 0{,}057;\ p_9 = 0{,}045.$$

Ймовірність того, що довідкове бюро буде зайняте, дорівнює

$$P_* = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = \\ = 1 - 0{,}013 - 0{,}052 - 0{,}104 - 0{,}139 - 0{,}139 = 0{,}553.$$

Інші показники ефективності:

$$P_{\text{відм}} = 0;\ Q = 1;\ A = \lambda = 6;\ \overline{k} = 4;$$
$$\overline{r} = \frac{0{,}013 \cdot 4^6}{5!5\,(1-0{,}8)^2} = 2{,}22;\ \overline{z} = 2{,}22 + 4 = 6{,}22;$$
$$\overline{t}_c = 6{,}22/6 = 1{,}04;\ \overline{t}_{\text{ч}} = 2{,}22/6 = 0{,}37.$$

В порівнянні з попереднім випадком абсолютна пропускна спроможність збільшилась за рахунок деякого збільшення середнього часу перебування заявки в черзі, причому останнє незначне. Середнє число заявок в черзі теж невелике. □

2.4 Пуас/Дов/1/∞

Продовжуючи вважати, що вхідний потік заявок — найпростіший, а місткість накопичувача не обмежена, припустимо тепер, що потік обслуговування має довільний розподіл і що в СМО є лише один канал обслуговування. Числові характеристики потоку обслуговування такі: $\mathbf{M}T_{\text{об}} = 1/\mu$, $\mathbf{D}T_{\text{об}} = \sigma^2$. Можна показати, що така СМО не буде марковською, а її характеристики обчислюються ***за формулами Полячека-Хінчина***:

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{r} = \frac{\rho^2\,(1+v^2)}{2\,(1-\rho)},\ \overline{t}_{\text{ч}} = \frac{\rho^2\,(1+v^2)}{2\lambda\,(1-\rho)}, \\ &\overline{z} = \overline{r} + \rho,\ \overline{t}_{\text{c}} = \overline{t}_{\text{ч}} + \frac{1}{\mu}, \end{aligned}}$$

де $\rho = \lambda/\mu$ — коефіцієнт завантаження системи, $v = \sigma\mu$ — ***коефіцієнт варіації часу обслуговування***.

Приклад 2.4. *У вагонне депо прибуває для ремонту найпростіший потік вагонів з середнім інтервалом прибуття 9 год. Ремонт вагону в середньому дорівнює 8 год і розподілений по довільному закону, причому, с.к.в. дорівнює 2 год. Визначити середнє число вагонів в депо; з них, що чекають ремонту; середній час очікування початку ремонту; середній час перебування вагону в депо.*

Розв'язання. Очевидно, даний об'єкт відноситься до розглядуваного типу СМО. За умовою середній інтервал між прибуттями вагонів складає $\mathbf{M}T = 9$ (год.). Отже, інтенсивність вхідного потоку заявок дорівнює $\lambda = 1/\mathbf{M}T = 1/9 \approx 0{,}111$ (вагонів/год). Середній час обслуговування також задано, він дорівнює $\mathbf{M}T_{\text{об}} = 8$ (год). Отже, інтенсивність потоку обслуговування складає $\mu = 1/\mathbf{M}T_{\text{об}} = 1/8 = 0{,}125$ (вагонів/год). Відома дисперсія часу обслуговування $\mathbf{D}T_{\text{об}} = \sigma^2 = 2^2 = 4$. Визначимо інші параметри роботи СМО: $\rho = \lambda/\mu = 8/9 = 0{,}889$; $v = \sigma\mu = 2/8 = 0{,}25$. Використовуючи формули Полячека-Хінчина, знаходимо, що середнє число вагонів, що чекають ремонту, дорівнює

$$\overline{r} = \frac{0{,}889^2\,(1 + 0{,}25^2)}{2\,(1 - 0{,}889)} = 3{,}78;$$

середнє число вагонів в депо:

$$\overline{z} = \overline{r} + \rho = 3{,}78 + 0{,}889 = 4{,}67;$$

середній час очікування ремонту:

$$\bar{t}_{\text{ч}} = \frac{\overline{r}}{\lambda} = \frac{3{,}78}{0{,}111} = 34{,}02 \text{ (год.)};$$

середній час перебування вагона в депо:

$$\bar{t}_{\text{с}} = 34{,}02 + 8 = 42{,}02 \text{ (год.)}.$$

□

Лекція 3
Статистичне моделювання СМО

3.1 Основні поняття

На жаль, отримання аналітичних результатів в теорії масового обслуговування можливо тільки при виконанні істотних обмежень на модель СМО. Найістотнішим обмеженням є припущення про марковський характер процесу, що в реальних задачах виконується далеко не завжди. Результатом є те, що формули для розрахунку характеристик вдається дістати лише для найпростіших СМО.

У всіх інших випадках доводиться вдаватися до так званого статистичному моделювання, яке ще називають методом Монте-Карло. Суть його полягає в тому, що вручну або за допомогою ЕОМ імітується реалізація випадкових подій в СМО, таких, як, наприклад, надходження заявки, інтервал між надходженнями заявок, тривалість обслуговування заявки і т.п. Ці події моделюються масово і з швидкістю, що набагато перевищує швидкість реалізації таких подій в реальній дійсності. В результаті дуже швидко отримують статистичний матеріал, який можна піддати звичайній статистичній обробці. Особливо зручно це виконувати на ЕОМ: і статистичний матеріал на ній отримати, і відразу ж на ЕОМ його обробити. Наприклад, ті статистичні дані, які реальна система, скажімо, залізничного транспорту може подати протягом місяця, на ЕОМ можна отримати, наприклад, за добу. Більш того, при моделюванні можна випробувати режими роботи СМО, які на реальній системі перевірити буває або дуже складно або взагалі неможливо (наприклад, з міркувань безпеки). Навіщо ж ми вивчали аналітичні методи дослідження СМО? Тому що, як і в інших випадках, аналітичні й чисельні методи мають як свої переваги, так і свої недоліки. Аналітичні методи дають загальне уявлення про поведінку СМО через той простий факт, що в формули входять літери, які означають не що інше, як ціле сімейство значень тієї величини, яку буква позначає. Тому, знаючи, як може змінюватись дана величина, ми можемо уявити собі, як змінюватимуться й залежні від неї, скажімо, показники ефективності роботи СМО. Це — перевага аналітичного методу, а про недоліки вже було сказано. В протилежність аналітичним методам метод статистичного моделювання такої узагальненості не має, зате може бути застосованим практично до будь-яких типів СМО. Тому вивчати і використовувати доводиться обидва методи.

З чого ж починається метод Монте-Карло? Базовим в ньому є імітація здійснення такої в.п.: деяка випадкова величина ξ, що має рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$, приймає деяке своє значення з цього відрізка. Для ручних розрахунків є спеціальні таблиці випадкових чисел [6, 9, 12, 13], що складаються з таких реалізацій, так що при моделюванні просто треба взяти з таблиці чергове число. При використовуванні ЕОМ застосовують вбудовані практично в усі мови програмування спеціальні датчики випадкових чисел (це — звичайні процедури або функції), які носять назви подібні RANDOM, після звернення до яких значенням вихідного параметра дістають число з відрізка $[0;1]$. Виявляється, ці числа дозволяють далі набути значення випадкових величин, що мають будь-який розподіл! Розглянемо ці можливості.

3.2 Генерація випадкових чисел

Щоб отримати випадкове число X з відрізка $[a, b]$, використовують формулу

$$X = a + (b - a)\,\xi,$$

де ξ — згадана вище рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$ випадкова величина.

Для отримання с.в. X, розподіленої $N\,(m, \sigma)$, треба просто додати декілька випадкових (і незалежних) чисел ξ_i, рівномірно розподілених на відрізку $[0; 1]$:

$$X = m + \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6 \right).$$

Для ручних розрахунків існують таблиці випадкових чисел, розподілених $N\,(0, 1)$ [13]. Вибравши з такої таблиці випадкове число α, можна потім дістати з нього число X, розподілене $N\,(m, \sigma)$ за формулою

$$X = m + \sigma\alpha.$$

Найзагальнішим є метод зворотної функції [10], що дозволяє згенерувати випадкове число, що має будь-який розподіл. Нехай, наприклад, в.в. X має функцію розподілу $F(x)$. Тоді достатньо застосувати формулу

$$X = F^{-1}\,(\xi)\,.$$

Конкретизуємо таку формулу для показникового розподілу. В цьому випадку функція розподілу має вигляд

$$y = F\,(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Це означає, що зворотна функція матиме вигляд (треба розв'язати попереднє рівняння відносно x)

$$F^{-1}\,(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln\,(1 - y)\,,$$

а генерувати в.в. X, що має показниковий розподіл, треба за формулою

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln (1 - \xi) \, .$$

Оскільки $1 - \xi$ має такий самий розподіл, що й в.в. ξ, то попередню формулу можна спростити:

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi. \tag{3.1}$$

Для в.в. X, розподіленої за законом Ерланга з параметрами λ і k, в прикладі A.1 показано, що в.в. X є сумою k в.в., розподілених за показниковим законом з тим самим параметром λ. Отже, спочатку треба отримати за формулою (3.1) k випадкових чисел, а потім знайти їх суму. Відповідна формула має вигляд

$$X = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \ln \xi_i,$$

де $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — випадкові числа, рівномірно розподілені на відрізку $[0; 1]$.

3.3 Наближене обчислення показників ефективності СМО

Для розглянутих вище найпростіших СМО покажемо, грунтуючись на результатах [4], як на ЕОМ можна за допомогою багатократних обчислювань визначити наближені значення показників ефективності СМО. Застосовуючи методи генерації випадкових чисел, розподілених по одному із законів, згаданих в попередньому п., на ЕОМ дістають інтервали між надходженнями заявок в СМО Δt_i, $i = \overline{1, L}$, де L — заплановане для моделювання число заявок, що надійдуть в СМО. Отримують також часи обслуговування заявок τ_i, $i = \overline{1, V}$, де V — число обслужених в СМО заявок. Моменти надходження заявок в СМО

t_i обчислюються за формулою $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$, $i = \overline{1, L}$, причому, $t_0 = T_0$, де $[T_0, T_k]$ — інтервал часу, для якого відбувається моделювання роботи СМО. Далі будемо його називати просто інтервалом моделювання.

Нехай $r = \overline{1, R}$ — крок моделювання, який полягає в обслуговуванні r-й заявки або у відмові їй в обслуговуванні; R — число кроків моделювання. Якщо на поточному кроці моделювання r виконується умова

$$t_r < t_{\min,\text{ч}}(r-1) \wedge t_r < t_{\min,\text{ос}}(r-1)\,, \tag{3.2}$$

де $t_{\min,\text{ч}}(r-1)$ — найближчий час звільнення місця в черзі, а $t_{\min,\text{ос}}(r-1)$ — найближчий час звільнення каналу СМО, то чергова заявка не може бути обслужена, тобто дістає відмову. (Якщо хоча б одне місце в черзі вільне, то $t_{\min,\text{оч}}(r-1) \leq t_r$). В цьому випадку спеціальний лічильник числа відмов збільшує своє значення на одиницю.

При невиконанні умови (3.2) обчислюється момент виходу заявки з системи:

$$P(r) = \begin{cases} t_r + \tau_r, & t_{\min,\text{ч}}(r-1) \leq t_r \leq t_{\min,\text{ос}}(r-1)\,; \\ t_{\min,\text{ос}}(r-1) + \tau_r, & t_r > t_{\min,\text{ос}}(r-1)\,. \end{cases}$$

(Якщо хоча б один з каналів обслуговування вільний, то $t_r < t_{\min,\text{ос}}(r-1)$).

Далі визначається момент звільнення s-го каналу після обслуговування поточної r-ї заявки:

$$o(s, r) = P(r)\,,$$

і момент вивільнення m-го місця в черзі від r-ї заявки:

$$e(m, r) = t_{\min,\text{ос}}(r-1)\,.$$

Далі обчислюються величини

$$t_{\min,\text{ос}}(r) = \min_{1 \leq s \leq M} o(s, r)\,,$$

де s — номер каналу, M — число каналів;

$$t_{\min,\text{ч}}\left(r\right)=\min_{1\le m\le N}e\left(m,r\right),$$

де m — номер місця в черзі, N — число місць в черзі. Номери каналу і місця в черзі, на яких досягаються ці мінімуми, позначаються, відповідно, s^* і m^*.

Моделювання припиняється при виконанні умови

$$t_r>T_k\vee r>L.$$

При цьому фіксуються R $(R<L)$ — число кроків моделювання (фактичне число заявок, що надійшли в СМО) і V — число обслужених заявок.

Нарешті, параметри роботи СМО і показники ефективності її роботи обчислюються на основі усереднених характеристик, отриманих при моделюванні.

Середня тривалість інтервалу між надходженнями заявок:

$$\overline{T}_{\text{ін}}=\frac{t_L-t_1}{L-1}.$$

Інтенсивність надходження заявок в СМО:

$$\lambda=\frac{1}{\overline{T}_{\text{ін}}}.$$

Середній час обслуговування заявки:

$$\overline{\tau}=\frac{1}{V}\sum_{r=1}^{V}\tau_r.$$

Інтенсивність обслуговування:

$$\mu=\frac{1}{\overline{\tau}}.$$

Коефіцієнт завантаження системи:

$$\rho = \lambda/\mu.$$

Абсолютна пропускна спроможність:

$$A = \frac{V}{t_R - T_0}.$$

Ймовірність відмови:

$$p_{\text{відм}} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} E\left[t_r - t_{\min,\text{ч}}\left(r-1\right)\right],$$

де $E\left(x\right)$ — одинична ступінчаста функція вигляду

$$E\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Відносна пропускна спроможність:

$$Q = 1 - p_{\text{відм}}.$$

Середній час очікування в черзі:

$$\begin{aligned}\bar{t}_{\text{ч}} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}&\left[t_{\min,\text{ос}}\left(r-1\right) - t_r\right]\cdot\\ &\cdot E\left[t_r - t_{\min,\text{ч}}\left(r-1\right)\right] E\left[t_{\min,\text{ос}}\left(r-1\right) - t_r\right].\end{aligned}$$

Середнє число зайнятих каналів:

$$\overline{k} = \frac{A}{\mu} = A\overline{\tau}.$$

Середнє число заявок в черзі:

$$\overline{r} = \lambda\bar{t}_{\text{ч}}.$$

Середнє число заявок в системі:

$$\overline{z} = \overline{k} + \overline{r} = \frac{A}{\mu} + \lambda \bar{t}_{\text{ч}}.$$

Середній час перебування заявки в системі:

$$\bar{t}_c = \frac{\overline{z}}{\lambda}.$$

Залишається додати, що в деяких випадках можна суттєво спростити моделювання роботи СМО, замінюючи багатократні реалізації її роботи одноразовою, але достатньо довгою реалізацією [2]. Вельми корисні й загальні поради з моделювання є в [11].

3.4 Потоки Ерланга

Потоки Ерланга моделюють потоки необслужених, що виходять зі СМО, заявок, а також потоки обслуговування в багатоетапних СМО [8]. ***Потоком Ерланга k-го порядку*** називається потік, який виходить з найпростішого потоку, якщо в останньому зберегти кожну k-ту подію, а проміжні події відкинути. Таким чином, проміжок часу T між подіями в потоці Ерланга k-го порядку являє собою суму k незалежних в.в. $T_1, \ldots, T_k$, кожна з яких є аналогічним проміжком часу для найпростішого потоку:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Але для найпростішого потоку кожен проміжок часу T_i має один і той самий показниковий розподіл з одним і тим самим параметром λ. Тому відповідно до прикладу А.1 проміжок часу T матиме розподіл Ерланга k-го порядку з тим самим параметром λ.

Розглянемо, як змінюватиметься потік Ерланга k-го порядку для $k \to \infty$ і незмінної щільності потоку λ. Для цього пронормуємо T:

$$\widetilde{T} = \frac{T}{k}.$$

Такий потік називається ***нормованим потоком Ерланга k-го порядку***. Його розподіл розглянуто в додатку В. Там показано, що дисперсія в.в. $\widetilde{T}$ прямує до 0 для $k \to \infty$. Це означає, що нормований потік Ерланга прямує до ***регулярного потоку***, який характеризується однаковими інтервалами між подіями, що дорівнюють $1/\lambda$. Задаючи різні значення параметра k, можна отримувати будь-який ступінь післядії: від повної її відсутності ($k = 1$) до повної регулярності ($k = \infty$).

Додаток А
Розподіл Ерланга k-го порядку

Щільність імовірностей в.в. X, розподіленої згідно із законом ***Ерланга к-го порядку***, має вигляд

$$\boxed{f_k(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Для $k = 1$ маємо показниковий розподіл.

Для доведення того, що ця функція дійсно є щільністю ймовірностей, розглянемо інтеграл

$$L_k = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda\,(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int\limits_0^\infty x^{k-1}\, e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \Big\langle u = x^{k-1},\ dv = e^{-\lambda x}\, dx,\ du = (k-1)\, x^{k-2}\, dx,$$

$$v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big\rangle =$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left(-\frac{1}{\lambda} x^{k-1} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \frac{k-1}{\lambda} \int\limits_0^\infty x^{k-2}\, e^{-\lambda x}\, dx \right) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\lambda\,(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!}\, e^{-\lambda x}\, dx = L_{k-1}.$$

Для показникового розподілу відомо, що $L_1 = 1$. Отже, $L_k = 1$ для будь-якого k. Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda x}\,dx = 1.$$

Графіки щільностей розподілу Ерланга k-го порядку для різних k показані на рис. А.1.

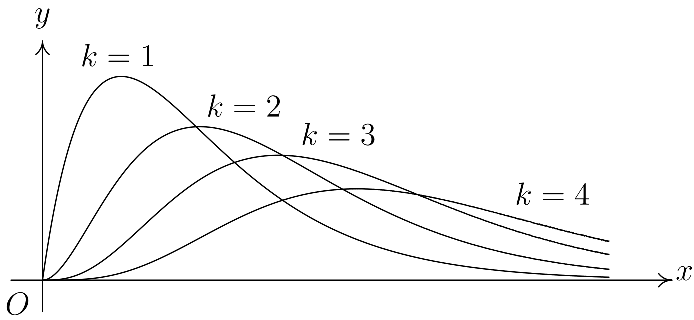

Рис. А.1: Щільності ймовірностей для розподілу Ерланга

Знайдемо функцію розподілу. Нехай $x \geq 0$. В цьому випадку при $k > 1$ (див. попередні викладки)

$$F_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_k(x)\,dx = \int\limits_{0}^{x} \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(-\frac{1}{\lambda}x^{k-1}e^{-\lambda x}\Big|_0^x + \frac{k-1}{\lambda}\int\limits_0^x x^{k-2}\,e^{-\lambda x}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda x} + F_{k-1}(x)\,.$$

Тому, продовжуючи і т.д., дістанемо

$$F_k(x) = -\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda x} - \dots - \lambda x e^{-\lambda x} + F_1(x).$$

Але $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ і тому

$$F_k(x) = -\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda x} - \dots - \lambda x e^{-\lambda x} + 1 - e^{-\lambda x},$$

або

$$F_k(x) = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}.$$

Визначимо числові характеристики. Математичне сподівання:

$$\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_k(x)\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} x \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{k}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{k}}{k!} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{k}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x)\, dx = \frac{k}{\lambda}.$$

Дисперсія:

$$\mathbf{M}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_k(x)\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{k(k+1)}{\lambda^2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{k(k+1)}{\lambda^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{k+2}(x)\, dx = \frac{k(k+1)}{\lambda^2},$$

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{k(k+1)}{\lambda^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Приклад А.1. *Показати, що закон Ерланга виникає внаслідок додавання незалежних в.в., підпорядкованих показниковому закону з одним і тим самим параметром λ.*

Розв'язання. Спочатку доведемо допоміжне твердження. Нехай в.в. Z є сумою двох незалежних в.в.: $Z = X + Y$, причому, в.в. X розподілена за законом Ерланга k-го порядку, а в.в. Y — за показниковим законом з тим самим параметром λ. Тоді згідно з розподілом суми двох в.в. матимемо щільність імовірностей

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int\limits_0^z \frac{\lambda\,(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda z} \int\limits_0^z x^{k-1}\, dx = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot \frac{x^k}{k}\, e^{-\lambda z}\Big|_0^z =$$

$$= \frac{\lambda\,(\lambda z)^k}{k!}\, e^{-\lambda z},$$

$z \geq 0$.

Таким чином, сума має розподіл Ерланга $(k+1)$-го порядку. Нехай в.в. X є такою сумою: $X = X_1 + \cdots + X_n$, причому, всі в.в. у цій сумі незалежні й розподілені по показниковому закону з одним і тим самим параметром λ. З доведеного отримуємо, що сума перших двох доданків розподілена за законом Ерланга 2-го порядку, перших трьох доданків — за законом Ерланга 3-го порядку і т.д., нарешті, сума n доданків розподілена за законом Ерланга n-го порядку. □

Додаток В
Нормований розподіл Ерланга

Нехай в.в. Z має розподіл Ерланга k-го порядку. Нормованим розподілом Ерланга k-го порядку називається розподіл в.в. $X = Z/k$. Знайдемо її щільність імовірностей, функцію розподілу і числові характеристики. Щільність імовірностей дорівнює

$$F_{X,k}(x) = P(X < x) = P(Z/k < x) = P(Z < kx) = F_{Z,k}(kx),$$

де $F_{X,k}$ — функція розподілу в.в. X, а $F_{Z,k}(z)$ — функція розподілу в.в. Z, отримана в попередньому п. Використовуючи її, знаходимо, що

$$F_{X,k}(x) = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m-0}^{k-1} \frac{(\lambda kx)^m}{m!} e^{-\lambda kx}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m-0}^{k-1} \frac{\left(\overline{\lambda} x\right)^m}{m!} e^{-\overline{\lambda} x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

де $\overline{\lambda} = \lambda k$. Таким чином, нормований розподіл Ерланга k-го порядку збігається із звичайним розподілом Ерланга k-го порядку, якщо параметр λ замінити параметром $\overline{\lambda}$. Тому решта результатів є прямим висновком результатів попереднього розділу. Так, щільність імовірностей $f_{X,k}$ в.в. X визначається формулою

$$\boxed{f_{X,k} = \begin{cases} \frac{\overline{\lambda}\left(\overline{\lambda}x\right)^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\overline{\lambda}x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}}$$

Числові характеристики виходять такими:

$$\mathbf{M}X = \frac{k}{\overline{\lambda}} = \frac{1}{\lambda},$$
$$\mathbf{D}X = \frac{k}{\overline{\lambda}^2} = \frac{1}{k\lambda^2}.$$

Відзначимо, що математичне сподівання не залежить від k, тобто воно залишається одним і тим самим для всього сімейства нормованих розподілів Ерланга k-го порядку. Для $k \to \infty$ дисперсія $\mathbf{D}X \to 0$. Це означає, що отримана таким чином гранична в.в. насправді випадковою величиною вже не є і фактично ототожнюється зі своїм математичним сподіванням $1/\lambda$.

Навпаки, по числових характеристиках можна знайти параметри λ і k:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{M}X},\ k = \frac{(\mathbf{M}X)^2}{\mathbf{D}X}.$$

Додаток C
Процес розмноження й загибелі

Приклад C.1. *Знайти граничний (стаціонарний) розподіл імовірностей для процесу розмноження й загибелі.*

Розв'язання. Як показує граф інтенсивностей цього процесу [5], всі його стани істотні і сполучаються між собою. Отже, граничний розподіл імовірностей збігається зі стаціонарним. Знайдемо останній, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\mathbf{\Lambda} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{N} p_i &= 1, \end{aligned} \tag{C.1}$$

де $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ — вектор стаціонарного розподілу ймовірностей станів процесу, $\mathbf{\Lambda}$ — матриця інтенсивностей переходів. Для цього розглянемо фрагмент згаданого графа інтенсивностей, показаний на рис. C.1. Йому відповідає фрагмент матриці інтенсивностей вигляду

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \mu_{i-1} & -(\lambda_{i-1}+\mu_{i-1}) & \lambda_{i-1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \mu_i & -(\lambda_i+\mu_i) & \lambda_i & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \mu_{i+1} & -(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}) & \lambda_{i+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

□

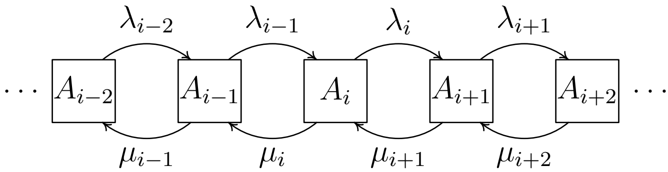

Рис. С.1: Фрагмент графа процесу розмноження й загибелі

Множення вектора $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_N)$ в лівій частині системи (С.1) на i-й стовпець матриці Λ дає i-те рівняння системи вигляду

$$\lambda_{i-1}p_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i)p_i + \mu_{i+1}p_{i+1} = 0,$$

або

$$\lambda_{i-1}p_{i-1} - \mu_i p_i = \lambda_i p_i - \mu_{i+1}p_{i+1}. \tag{С.2}$$

Розглянемо величину $g_i = \lambda_{i-1}p_{i-1} - \mu_i p_i$, причому, покладемо $g_0 = \lambda_{-1}p_{-1} - \mu_0 p_0 = 0$, цілком природно вважаючи, що $\lambda_{-1} = p_{-1} = \mu_0 = 0$. З рівняння (С.2) дістаємо, що $g_i = g_{i+1}$, а тоді $g_N = \cdots = g_1 = g_0 = 0$. Визначення величини g_i дає рівність $\lambda_{i-1}p_{i-1} = \mu_i p_i$, звідки

$$p_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\, p_{i-1} = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i}\, p_0,$$

або

$$\boxed{p_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\, p_0;\ \ i = \overline{1, N};} \tag{С.3}$$

де

$$\prod_{k=1}^{m} a_k = a_1 a_2 \cdots a_m.$$

Ймовірність p_0 знайдемо з умови $\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$, яка в даному випадку приймає вигляд

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\right) p_0 = 1$$

Тоді

$$\boxed{p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\right)^{-1}.} \tag{C.4}$$

Формули (C.4) і (C.3) дають стаціонарний і граничний розподіл імовірностей процесу розмноження й загибелі.

Література

[1] Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. — М.: Наука, 1989.

[2] Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1988.

[3] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1991.

[4] Волченко Ю.М. Структурно-логические модели систем обслуживания с приоритетами. — Электронное моделирование, № 3, 1990.

[5] Волченко Ю.М. Числові характеристики в.в. Граничні теореми. Елементи теорії випадкових процесів. Конспект лекцій з дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика». — Донецьк: ДонІЗТ, 1999.

[6] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1986, ч. II.

[7] Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971.

[8] Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1979.

[9] Кузин Л.Т. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики. — М.: Энергия, 1973, т. 1.

[10] Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Получисленные алгоритмы. — М., Мир, 1977, т. 2.

[11] Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания. — М.: МГУ, 1984.

[12] Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П.Демидовича. — М.: Наука, 1984, т. 3.

[13] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1982.

Волченко Юрій Михайлович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ
МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ»

Комп'ютерний макет	*Волченко Ю.М.*
Технічні редактори	*Григор'єва Л.В.* *Пасько Л.С.*

Підписано до друку
Формат 60 × 84/16. Папір писальний. Гарн. Times New Roman
Друк ксероксний
Умов. друк. арк. 2,7. Обл.-вид. арк. 2,5
Наклад 60 прим. Зам. №   .

Донецький інститут залізничного транспорту

Надруковано в редакційно-видавничому відділі ДонІЗТ
Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 22.06.2004 р.,
серія ДК № 1851

83018, м. Донецьк – 18, вул. Горна, 6.